मंथन

सेवारत शिक्षक–प्रशिक्षण मॉड्यूल

उच्च प्राथमिक स्तर

(कक्षा 6 से 8)

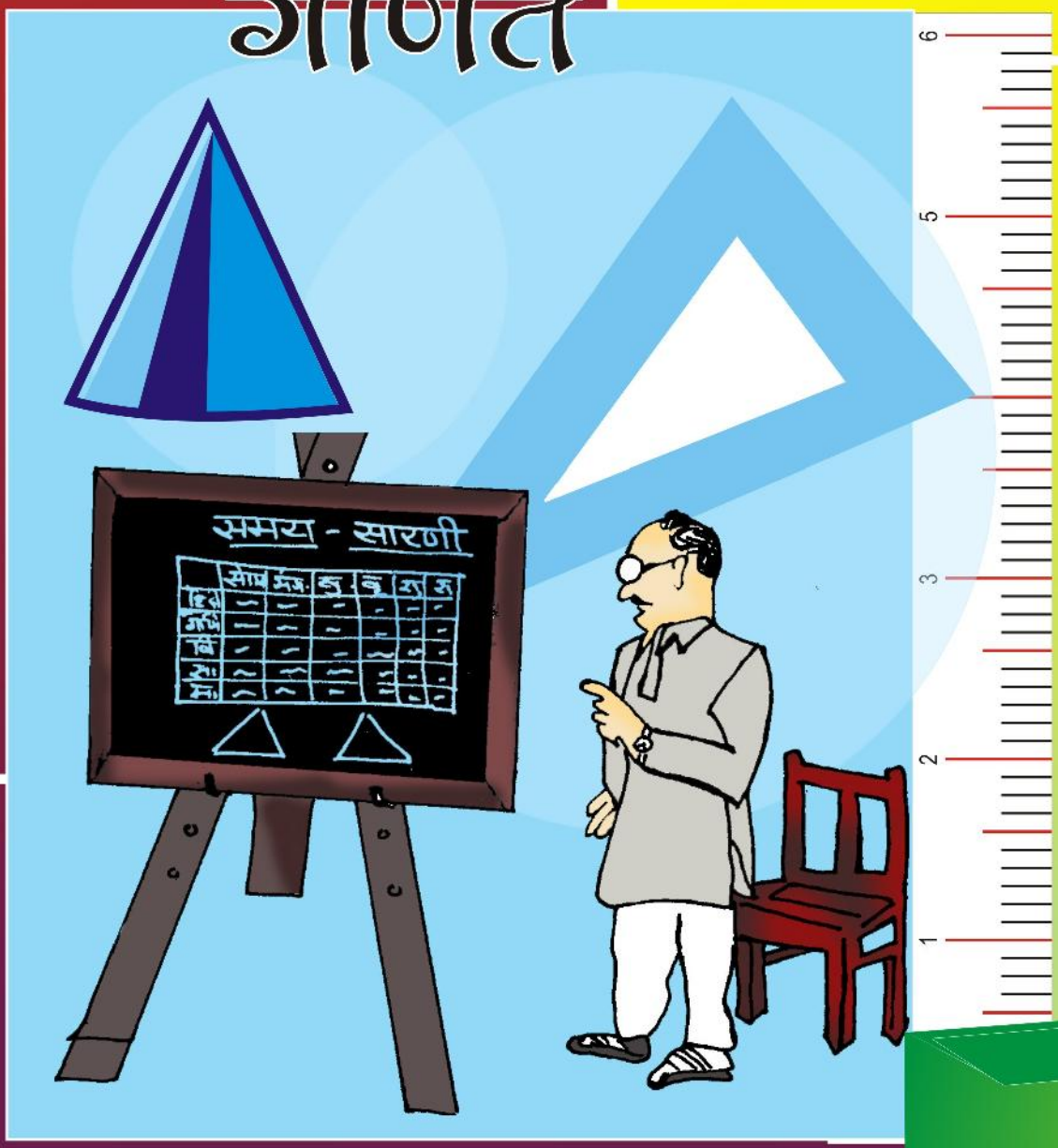
शिक्षा का अधिकार

सर्व शिक्षा अभियान
सब पढ़ें सब बढ़ें

SCERT, UK

2014-15

गणित



राज्य परियोजना कार्यालय, सर्व शिक्षा अभियान, उत्तराखण्ड
एवं
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, उत्तराखण्ड
देहरादून

सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण क्षमता संवर्द्धन

गणित प्रशिक्षण मॉड्यूल–2014–15

कक्षा – 6 से 8

शिक्षा का अधिकार

सर्व शिक्षा अभियान
सब पढ़ें सब बढ़ें

राज्य परियोजना कार्यालय उत्तराखण्ड

SCERT, UK

राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद उत्तराखण्ड

संरक्षक :

एस.राजू आई.ए.एस.
अपर मुख्य सचिव, विद्यालयी शिक्षा, उत्तराखण्ड शासन।

डा. एम.सी. जोशी आई.ए.एस.
प्रभारी सचिव, विद्यालयी शिक्षा, उत्तराखण्ड शासन।

परामर्श एवं निर्देशनः

राधिका झा आई.ए.एस.
राज्य परियोजना निदेशक, सर्व शिक्षा अभियान, उत्तराखण्ड।

सीमा जौनसारी
निदेशक, अकादमिक, शोध एवं प्रशिक्षण, उत्तराखण्ड।

डॉ. कुसुम पन्त
अपर राज्य परियोजना निदेशक, सर्व शिक्षा अभियान, उत्तराखण्ड।

अमिता जोशी
वित्त नियंत्रक, सर्व शिक्षा अभियान, उत्तराखण्ड।

शैक्षिक परामर्श, प्रशिक्षण अभिकल्पना एवं समन्वयन :

डॉ. आर. डी. शर्मा
प्रभारी अपर निदेशक, एस. सी. ई. आर. टी., उत्तराखण्ड।

मेहरबान सिंह बिष्ट, विशेषज्ञ, सर्व शिक्षा अभियान, रा. प. का., दे. दून।

बी.पी.मैन्दोली, राज्य समन्यवक, सर्व शिक्षा अभियान, रा. प. का., दे. दून।

अरूण सिंह बिष्ट, राज्य समन्यवक, सर्व शिक्षा अभियान, रा. प. का., दे. दून।

विषय समन्वयक

शैलेश कुमार श्रीवास्तव, प्रवक्ता SCERT

मॉड्यूल निर्माण समूह :

शैलेश कुमार श्रीवास्तव प्रवक्ता SCERT, सुधीर चन्द्र नौटियाल प्रवक्ता डायट टिहरी, संजय नौटियाल अज़ीम प्रेमजी फाउन्डेशन उत्तराखण्ड, नीलम पंवार प्रवक्ता डायट पौड़ी, इरशाद आलम स.अ. रा.उ.मा.वि.नौडा, संदीप कुकरेती स.अ.रा.उ.मा.वि.तिलधारखाल, कैलोश चंदोला प्रवक्ता रा.इ.का.कपकोट।

- **कम्प्यूटर डिजाइनिंग :**
  सोहन सिंह रावत

प्राक्कथन

सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण एक ऐसा माध्यम है जिसके जरिए शिक्षक एक साथ आपस में मिलकर सीखने-सिखाने की प्रक्रियाओं पर निरंतर समझ को विकसित करते हैं। विद्यालयों में शिक्षण कार्य को बेहतर बनाने की दिशा में यह प्रयास बच्चे को बेहतर नागरिक बनने की तरफ अग्रसर करता है। यदि शिक्षक प्रशिक्षण, शिक्षक-शिक्षिकाओं को अपने अनुभवों को साझा करने व उन्हें उसमें सक्रिय भागीदारी के अवसर दे तो विद्यालयों में सीखना-सिखाना बेहतर हो सकता है।

उत्तराखंड राज्य में सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण के माध्यम से स्कूलों में कार्यरत शिक्षकों को शैक्षिक समर्थन देना प्रमुख उद्देश्य रहा है। सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण एक निरंतर जारी रहने वाली प्रक्रिया है जिसमें शिक्षक, कक्षा में किए गए शैक्षिक कार्य पर आत्ममंथन एवं विश्लेषण करने के पश्चात् अपने शैक्षिक कौशलों को लेकर स्वयं समालोचना कर सकते हैं।

शिक्षा का अधिकार-2009 हमारे सामने हैं जो हमें गुणवत्तापूर्ण शिक्षा की ओर ले जाता है। विद्यालयों में गुणात्मक शिक्षा को स्थापित करने का एक सबसे सशक्त तरीका यही है कि हम सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण को जीवंत बनाएं। विद्यालयों के पहले हमें सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण को गुणवत्तापूर्ण बनाने की ओर विशेष ध्यान देना होगा। सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण में बनी समझ, शिक्षक जब अपने विद्यालयों के बच्चों को देंगे तो बच्चे निश्चित ही वह सीखेंगे जो समझ पर आधारित होगा।

राष्ट्रीय शैक्षिक उपलब्धि सर्वेक्षण (NAS) तथा राज्य द्वारा कराये गये राज्य शैक्षिक उपलब्धि सर्वेक्षण (SLAS) में गणित विषय में बच्चों के उपलब्धि स्तर को संतोषजनक नहीं कहा जा सकता है। गणित विषय को रोचक तथा व्यावहारिक जीवन से जोड़ने की आवश्यकता है इसके लिए गणित विषय के आधारभूत प्रत्ययों (Concepts) को स्पष्ट करना आवश्यक है। कक्षा 6 से 8 तक के गणित विषय की अपेक्षित दक्षतायें, बच्चे प्राप्त कर सकें, इसके लिए अध्यापकों को कुछ प्रमुख दक्षताओं/अधिगम संकेतकों को सेवारत अध्यापक प्रशिक्षण के गणित माड्यूल के माध्यम से स्पष्ट करवाने का प्रयास किया गया है जिनमें से कुछ प्रमुख बिन्दु/पाठ हैं- संख्यायें, पूर्णांकों पर संक्रियायें, परिमेय संख्यायें, बीजगणित की संक्रियायें, चर तथा अचर की अवधारण, परिमाप, क्षेत्रफल आदि गणित की सभी दक्षतायें केवल एक साल के प्रशिक्षण से संभव नही है। अत: तीन वर्ष के प्रशिक्षण की संकल्पना की जा रही है।

मुझे पूर्ण विश्वास तथा अपेक्षा है कि अध्यापक, लिये गये प्रशिक्षण का अपनी कक्षा कक्ष की शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया में प्रयोग करेंगे तथा बच्चों की गणित विषय की दक्षतायें प्राप्त करने में अपना पूर्ण योगदान करेंगे।

मुझे आशा ही नही अपितु पूर्ण विश्वास है कि शिक्षक प्रशिक्षण के लिए तैयार किया गया यह मॉड्यूल, राज्य के शिक्षक-शिक्षिकाओं के बीच गणित की अवधारणा की समझ बनाने तथा प्रत्येक विद्यालय में प्रभावशाली ढंग से लागू करने में महती भूमिका अदा करेगा।

मॉड्यूल को और बेहतर बनाने में राज्य के शिक्षकों, शिक्षक प्रशिक्षकों तथा शिक्षा में कार्य करने वाले प्रबुद्धजनों के सुझावों तथा समालोचनात्मक टिप्पणियों का सदैव स्वागत है। मैं विभाग की ओर से इस मॉड्यूल निर्माण की पूरी प्रक्रिया में शामिल रहे राज्य के शिक्षकों, शिक्षक प्रशिक्षकों, सर्व शिक्षा अभियान, एस.सी.ई.आर.टी., अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन, प्रथम एजुकेशन फाउण्डेशन आदि के प्रति अपना धन्यवाद ज्ञापित करती हूँ।

शुभकामनाओं सहित !

राधिका झा *आई.ए.एस.*
राज्य परियोजना निदेशक
सर्व शिक्षा अभियान, उत्तराखण्ड।

सेवारत शिक्षक-प्रशिक्षण 2014-15

समय विभाजन चक्र

गणित

समय	प्रथम सत्र		द्वितीय सत्र		तृतीय सत्र		चतुर्थ सत्र
दिवस	प्रात: 10.00 से 11.20 तक	चाय अवकाश : 11.20 से 11.40 तक	प्रात: 11.40 से 1.00 तक	भोजनावकाश : 1.00 से 2.00 तक	अपराह्न 2.00 से 3.20 तक	चाय अवकाश : 3.20 से 3.40 तक	अपराह्न 3.40 5.00 तक
प्रथम	पंजीकरण परिचय पूर्व पोषण		राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 (गणित शिक्षण के प्रति दृष्टिकोण)		संख्याओं के प्रकार गतिविधि -1 और 2		ऋणात्मक पूर्णांक गतिविधि -3 मूल्यांकन प्रश्न
द्वितीय	पुनरावलोकन पूर्णांकों पर संक्रियाएं गतिविधि 1 व 2		पूर्णांकों की गुणा मूल्यांकन परिमेय संख्याएं		बीजगणित विकास के चरण बीजगणित की आवश्यकता व चिंतत		पैटर्न से बीजगणित की ओर संख्याओं से सम्बन्धित पैटर्न
तृतीय	पुनरावलोकन चर और अचर की अवधारणा बीजीय व्यंजकों की आधारभूत संक्रियाएं गतिविधि 1 और 2		बीजीय व्यजंकों की संक्रियाएं (जोड़ व घटाना) अवधारणात्मक त्रुटियां		बीजीय व्यजकों का गुणन		एकपदी का एक पदीय गुणन बीजीय व्यंजको में भाग की संक्रियायें
चतुर्थ	पुनरावलोकन एक चर वाले रैखिक समीकरण		समीकरण की अवधारणा बीजगणितीय समिका एवं सर्वसमिकाएं		क्षेत्रमिति मानक इकाईयां		परिमाप
पंचम	पुनरावलोकन परिधि और परिमाप परिमाप से सम्बन्धित अवधारणात्मक त्रुटियां		क्षेत्रफल गतिविधि 1, 2, 3		वृत्त का क्षेत्रफल		परिमाप, क्षेत्रफल से सम्बन्धित अवधारणात्मक त्रुटियां, पश्चपोषण समापन।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा –2005

गणित शिक्षण के प्रति दृष्टिकोण

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2005
(गणित शिक्षण के प्रति दृष्टिकोण)

समय : 80 मिनट

औचित्य :

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2005 में गणित शिक्षा का मुख्य लक्ष्य बच्चों की गणितीय क्षमताओं को निखारना है साथ ही साथ पाठ्यचर्या में शिक्षक को गणित शिक्षा के नवीन प्रक्रियाओं से परिचित कराया गया है। प्रत्येक बच्चा गणित सीख सकता है तथा हर बच्चे को बेहतर गणित शिक्षा पाने का अधिकार है, इस संदेश को भी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा में सम्मिलित किया गया है। प्रत्येक शिक्षक को गणित शिक्षा के इस नवीन स्वरूप की जानकारी हो इसीलिए इस सत्र में राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2005 के गणित शिक्षण के राष्ट्रीय फोकस समूह के आधार पत्र के गणितीय दृष्टिकोण को रखा गया है।

उद्देश्य:- इस सत्र के उपरान्त प्रतिभागी -

- राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2005 में वर्णित स्कूली गणित के दर्शन को स्पष्ट कर सकेंगे।
- गणित शिक्षण के विभिन्न उपागमों की व्याख्या कर सकेंगे।

सहायक सामग्री:-

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2005 गणित शिक्षण का आधार पत्र, चार्ट, मार्कर, स्केच पेन, व्हाइट बोर्ड।

प्रक्रिया:-

- सुगमकर्ता प्रतिभागियों से परिचय प्राप्त करेंगे एवं स्वयं का परिचय देंगें।
- सुगमकर्ता बड़े समूह में निम्नलिखित चर्चा प्रश्न प्रस्तुत करेंगे।

चर्चा प्रश्न- राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2005 क्या है?

- सुगमकर्ता छः समूहों का निर्माण करेंगे।
- सुगमकर्ता निम्नलिखित हैण्डआउट अलग-2 समूहों को वितरित करेंगे-

समूह सं0-1:- गणित शिक्षा के लक्ष्य एवं दृष्टि कथन।

समूह सं0-2:- गणित के शिक्षण और सीखने की समस्याएं।

समूह सं0-3:- आधार पत्र की सिफारिश- ऊँचे लक्ष्यों की ओर।

समूह सं0-4:- आधार पत्र की सिफारिश- प्रक्रियाएँ।

समूह सं0-5:- आकलन एवं शिक्षकों को समर्थन।

समूह सं0-6:- पाठ्यचर्या विकल्प - उच्च प्राथमिक स्तर।

- प्रत्येक समूह को पढ़ने के पश्चात चार्ट पेपर पर नोट करने का कहेगा।
- सुगमकर्ता समूहवार प्रस्तुतीकरण करवाएगा।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005 एक राष्ट्रीय दस्तावेज है जो शिक्षा के नवीन स्वरूप को मार्गदर्शन प्रदान करता है।

गणित शिक्षा के लक्ष्यः–

- संकीर्ण उद्देश्यः रोजगार योग्य ऐसे वयस्कों का निर्माण करना जो सामाजिक और आर्थिक विकास में योगदान दे सकें।
- ऊँचे उद्देश्यः बढ़ते बच्चे के आन्तरिक संसाधनों का विकास करना।

स्कूली गणित का दर्शनः–

- बच्चे गणित में आनन्द लेना सीखें।
- बच्चे महत्वपूर्ण गणित सीखें।
- बच्चे गणित के बारे में बात करें।
- बच्चे अर्थपूर्ण गणितीय समस्याएँ प्रस्तुत तथा हल करें।
- बच्चे गणित की मूल संरचना को समझे।
- शिक्षक कक्षा के हर छात्र की शैक्षिक गतिविधियों से जुडाव की अपेक्षा रखे।

गणित सीखने सिखाने की समस्याएंः–

- भय और असफलता का भाव।
- निराशाजनक पाठ्यचर्या।
- अपरिष्कृत मूल्यांकन।
- शिक्षक की अपर्याप्त तैयारी।
- व्यवस्थागत समस्याएं।

प्रमुख सिफारिशेंः–

- गणितीय विषयवस्तु से गणितीय अधिगम वातावरण की ओर।
- गणितीय प्रक्रियाओं के महत्व को समझना तथा कई चीजों में फर्क समझना जैसे गणित करना–गणित छोड़ना, सोच का गणितीकरण–सूत्रों को कंठस्थ करना, सतही गणित–महत्वपूर्ण गणित, संकीर्ण लक्ष्य–ऊँचे लक्ष्य।
- सार्वत्रिक समावेश– सामाजिक विभेदीकरण, विशिष्ट आवश्यकताएं, पाठ्यपुस्तकों की भाषा, बहुकक्षा बहुशिक्षण, आकलन।

शिक्षकों का समर्थनः–

- शिक्षकों का पेशेवर विकास।
- संसाधनों की उपलब्धता।
- शिक्षकों का आपस में संवाद।

प्रक्रियाएँ:-

- औपचारिक समस्या समाधान-उदाहरण के लिए किसी समस्या को गणितीय समस्या के रूपमें देखना, समस्या के समाधान/हल हेतु अलग-2 दृष्टिकोणों का विश्लेषण करना, समस्या के हल हेतु किसी एक विधि का चुनाव करना व हल को किसी अन्य विधि द्वारा प्रतिपुष्ट करना।
- हयूरिस्टिक या स्वत: शोध प्रणाली जिसमें सामान्य सोच के तरीकों द्वारा नियमों को समझा जाना है जैसे वस्तु 'अ' वस्तु 'ब' में बड़ी है तथा वस्तु 'ब' वस्तु 'स' से बड़ी है तो यह जोड़ा जा सकता है कि वस्तु 'अ' वस्तु 'स' से भी बड़ी है।
- अनुमान एवं सन्निकटन में किसी भी समस्या/घटना के निष्कर्ष तक पहुँचने के लिए इन पूर्व अनुभवों के आधार पर अनुमान लगाते है और फिर उनके परिणामों का सत्यापन करते है।
- इस्तमीकरण या ऑप्टीमाइजेशन:- यह एक आवश्यक गणितीय कौशल है। इसमें किन्ही सीमित संसाधनों द्वारा अधिक से अधिक उद्देश्यों की पूर्ति के प्रयास किये जो है जैसे किसी बच्चे को रू. 10/- दिए जाएं और उससे पूछा जाए कि वह उनका उपयोग कैसे करेगा/करेगी तो वह अपने संदर्भ, जरूरत व बाजार में मौजूद वस्तुओं की कीमत को ध्यान में रखते हुए सोच कर बतायेगा/बतायेगी।
- दृश्यीकरण और निरूपण को अधिकतर ग्राफ विधि तक सीमित करके देखा जाता है परन्तु इस बात से और आगे बढ़ने की आवश्यकता है। जैसे किसी संख्या को दर्शाने के विभिन्न तरीकों को समझना। परिमेय संख्या जहाँ सामान्यीकरण में p/q के रूप में बताई जाती है वही उसका निरूपण संख्या रेखा में एक बिन्दु के तौर पर देखा जाता है
- व्यवस्थित तर्कण में उपपत्ति (प्रूफ) महत्वपूर्ण होती है। किसी भी नियम के पीछे के तर्क को समझने के तरीके व्यक्ति में विशेष कौशल विकसित करते है। उपपत्ति के तरीको को मात्र निगमन तक सीमित रखना पर्याप्त नहीं है।
- गणितीय संप्रेषण: गणित शिक्षण में गणितीय संप्रेषण एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है, इसके अन्तर्गत गणितीय सूत्र, प्रतीक एवं संप्रत्यय का अलग-2 अर्थ होता है। अत: गणितीय संप्रेषण सरल एवं सहज तरीके से किया जाना चाहिए।

(पठन सामग्री-1)

संख्याएं

- संख्याओं के प्रकार
- पूर्णांक
- पूर्णांकों पर संक्रियाएं
- परिमेय संख्याएं

संख्याएं

समय : 40 मिनट

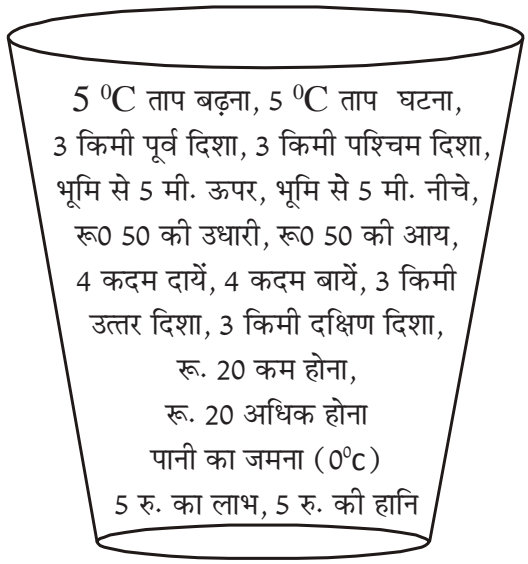
औचित्य–

दैनिक जीवन में उपयोग में आने वाली संख्याओं से हम सभी परिचित हैं और आये दिन इन संख्याओं को प्रयोग में भी लाते हैं किन्तु, जब संख्याओं का परिवार बड़ा होकर पूर्णांक के रूप में आ जाता है तो इन संख्याओं की समझ बनाने व इन पर संक्रियाओं (योग, घटाना, गुणा, भाग) को करने में कठिनाई आती है। इस कठिनाई को सरल करने का एक छोटा सा प्रयास इस मॉड्यूल में किया गया है।

संख्याओं के प्रकार

उद्देश्य– इस सत्र की समाप्ति के पश्चात प्रतिभागी –

1. संख्याओं के प्रकारों को स्पष्ट कर सकेंगे।
2. पूर्णांक की अवधारणा को स्पष्ट कर सकेंगे।



गतिविधि – 1

अपना संगत साथी ढूंढो

प्रक्रिया –

- सुगमकर्ता बाक्स में दिये गये शब्दों की पर्चियां बना कर बाक्स में रखेगा।
- सुगमकर्ता बड़े समूह के प्रतिभागियों को घेरे में खड़ा करेगा व बॉक्स में से एक पर्ची निकालने को कहेगा।
- पर्ची वाले प्रतिभागी अपना – अपना संगत साथी ढूढेंगे।

  (जैसे– रु. 50 की उधारी का संगत साथी रु. 50 की आय वाला होगा)
- प्रतिभागी अपनी तथा साथी की पर्ची के शब्दों को श्यामपट् पर दो अलग अलग खानों में लिखेगा।
- साथी प्रतिभागी तीसरे खानें में गणितीय रूप में (चिह्न सहित) दोनो संख्याओं को लिखेगा।

चर्चा प्रश्न 1 –

संकेतों के रूप में प्रयुक्त धन (+) व ऋण (–) चिह्नों के क्या अर्थ हैं?

समेकन –ह्न

- प्राय: धन चिह्न बढ़ने (उच्चतर स्थिति प्राप्त करने) व ऋण चिह्न घटने (कमतर स्थिति प्राप्त करने) को दर्शाता है।
- यदि हम किसी निर्देश बिन्दु से एक दिशा को (माना पूरब) धन (+) से प्रदर्शित करते हैं, तो उसकी विपरीत दिशा (पश्चिम) को ऋण (–) से प्रदर्शित करेंगे इसी प्रकार भूमितल को मूल बिन्दु / निर्देश

बिन्दु मानने पर भूमितल से ऊपर जाने पर धन (+) चिह्न तथा नीचे जाने पर ऋण (–) चिह्न का प्रयोग करते हैं।

- मूल बिन्दु / निर्देश बिन्दु सदैव शून्य (0) नहीं होता है।

चर्चा प्रश्न 2 –

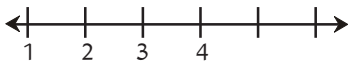
प्राप्त संख्याओं से आप कितने प्रकार के संख्या समूह बना सकते है?

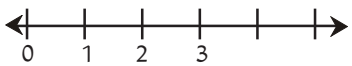
प्रक्रिया :

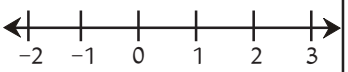
- सुगमकर्ता पहले धनात्मक संख्याओं का समूह बनायेगा व चर्चा करेगा।
- 0 को धनात्मक संख्याओं के साथ लिखने पर बने संख्या समूह पर चर्चा करेगा।
- ऋणात्मक संख्याओं, 0 व धनात्मक संख्याओं के संख्या समूह पर चर्चा करेगा।

समेकन :

संख्याओं को निम्नलिखित प्रकार से वर्गीकृत किया गया है –

1. **प्राकृतिक संख्याएं (Natural Numbers)** – 1, 2, 3, 4, 5 ..... आदि संख्याएं प्राकृतिक संख्या कहलाती है। इस संख्या समूह को N से प्रदर्शित करते है। 

2. **पूर्ण संख्या (Whole Numbers)** – (0,1,2,3,4, ...) जब प्राकृतिक संख्याओं में शून्य (0) सम्मिलित हो जाता है तो संख्याओं के इस परिवार को पूर्ण संख्याएं कहते है। इस संख्या समूह को W से प्रदर्शित करते है। 

3. **पूर्णांक संख्याएं (Integers)** – 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 आदि संख्या समूह को पूर्णांक कहा जाता है इन्हें I से प्रदर्शित करते है (पूर्ण संख्याएं +ऋणात्मक संख्या=पूर्णांक) 

पूर्णांक **समय :** 40 मिनट

गतिविधि –2

प्रक्रिया – सुगमकर्ता चार समूहों में निम्नलिखित प्रश्नों पर चर्चा एवम् प्रस्तुतीकरण करायेंगे।

चर्चा प्रश्न –

1. पूर्णांकों का दैनिक जीवन में कहां और कैसे उपयोग किया जाता है?
2. पूर्णांकों की आवश्यकता क्यों पड़ती है?

समेकन :

1. मौसम के समाचारों में अक्सर हम सुनते हैं कि आज लद्दाख में तापमान बहुत कम रहा है तथा यह शून्य से 20^0 नीचे हो गया है, या पनडुब्बी समुद्र तल से 1200 मीटर नीचे है एवं इसके ठीक ऊपर समुद्र तल से 5000 मीटर की ऊँचाई पर एक हवाई जहाज उड़ रहा है एक सड़क के अनुदिश रीता का घर स्कूल से 2 किमी. पूर्व मे और गीता का घर स्कूल से 1 किमी. पश्चिम में है।

2. किसी विशेष स्थिति के सापेक्ष दो विपरीत दिशाओं में प्रदर्शन हेतु दो अलग-अलग संकेतों (चिह्न/शब्द) की आवश्यकता होती है। गणित में भी इसी प्रकार के सापेक्षिक संख्या संकेतों को धन और ऋण संख्या संकेतों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। संख्या रेखा पर शून्य के सापेक्ष दायीं ओर की संख्याएं धनात्मक व बायीं ओर की संख्याएं ऋणात्मक संख्याएं कहलाती है।

ऋणात्मक पूर्णांक **समय :** 80 मिनट

गतिविधि-3

प्रक्रिया - सुगमकर्ता **पठन सामग्री** पर दो समूहों में निम्नलिखित प्रश्नों पर प्रस्तुतिकरण/चर्चा करवायेगें।

चर्चा प्रश्न -

1. ऋणात्मक पूर्णांकों की अवधारणा को बच्चों के दैनिक जीवन से जोड़ने हेतु गतिविधि पर चर्चा कीजिए।

2. धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं को स्पष्ट करने हेतु खेल/गतिविधि पर चर्चा कीजिए।

1. ऋणात्मक संख्या सिखाने में मुश्किल आती है इसके पीछे एक कारण है कि जब इन्हें रोजमर्रा के उदाहरणों के जरिए सिखाने की कोशिश करते है तो उसमें भी समस्याएं आती है। यह सुझाव हो सकता है कि उधारी को ऋणात्मक संख्याओं से दर्शाएं और चूकिं यह अपने आसपास पाई जाने वाली एक सामान्य घटना है इसलिए बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं का मूर्त अनुभव मिलेगा। रोजमर्रा के जीवन का यह एक ऐसा उदाहरण है जिसे ऋणात्मक संख्याओं की शुरूआत करने के लिए सबसे ज्यादा इस्तेमाल किया जाता है। यह हमारे जीवन से लिया हुआ उदाहरण है अत: इसके बारे में हम जो कहते या समझते हैं, उसकी अपनी एक अलग भाषा है। अगर संख्याओं को एक लाइन पर दर्शाने के पीछे जीवन की परिस्थितियों को समझाने का प्रयोजन होता तो हमारी संख्या रेखा ऐसी नहीं दिखती जैसी कि यह है। धनात्मक पूर्णाकों के लिये यह रेखा 0, 1, 2, 3 ... के रूप में आगे बढ़ती जाती जिस पर हम आय इत्यादि को दर्शाते है। ऋणात्मक पूर्णाकों के लिये यह रेखा -1, -2, -3, .. से शुरू होकर आगे बढ़ती जाती है जिस पर हम 'उधारी' प्रदर्शित कर सकते है। दरअसल इसी तरह हम आय और व्यय का हिसाब दो अलग-अलग खातों में रखते हैं।

2. हमने कक्षा छठवीं के बच्चों को एक खेल खिलाकर देखा। पासा फेंकने पर अगर उन्हें सम संख्या मिलती है तो वे जीत जाते है, विषम संख्या मिलने पर वे हार जाते है। बच्चों को छोटे समूहों में बाँटा गया और प्रत्येक समूह के हर विद्यार्थी को 10 राउण्ड खेलने को कहा गया। हर छात्र को अपने स्कोर का ध्यान रखना था, और

गिनते जाना था, अंत में हर समूह को अपने सदस्यों को सबसे ज्यादा से सबसे कम स्कोर के क्रम में रखना था। यह देखकर हैरानी हुई कि दस राउण्ड के अन्त में छात्रों को अपने स्कोर की गणना करने में कोई दिक्कत नहीं आई।

अगर कोई 5 राऊण्ड जीता और 5 हारा तो स्पष्टत: हार–जीत आपस में कट गए और उस छात्र को 0 स्कोर/अंक मिले। जो छात्र 7 राऊण्ड हारा और 3 जीता उसे 4 अंक मिले। वे समूह के सदस्यों के स्कोर को भी घटते क्रम में जमा पा रहे थे, सबसे कम से लेकर सबसे ज्यादा अंक किसे मिले? जिसे –4 अंक मिले उसे–1 से नीचे रखा गया, स्पष्ट: ज्यादा राऊंड हारना, मतलब कम अंक मिलना। अगर हम बच्चों के इस विवेक/सहजबुद्धि का इस्तेमाल करें तो यह समझना, आसान हो जाता है कि –1 को 0 के बाँयी ओर रखा जाना चाहिए आदि–आदि।

साभार–जयश्री सुब्रमण्यम

(पठन सामग्री–2)

मूल्यांकन प्रश्न (प्रतिभागियों हेतु) –

1. सबसे छोटी पूर्ण संख्या बताइए?
2. शून्य धनात्मक है या ऋणात्मक?
3. राम और रमेश दोनों संख्या रेखा पर शून्य पर खड़े है। राम 5 स्थान दाँयी ओर चलकर (+5) पर पहुंचता है तथा रमेश 5 स्थान बाँयीऔर चलकर (–5) पर पहुंचता है –
   - अ) कौन अधिक दूरी चलता है? और क्यों?
   - ब) दोनों के बीच कितने स्थान है?
4. दो अंको का सबसे छोटा पूर्णांक बताइए?
5. सबसे छोटा तथा सबसे बड़ा पूर्णांक बताइए?

समय : 80 मिनट

पूर्णांकों पर संक्रियाए

(Operations on Integers)

उद्देश्य – इस सत्र की समाप्ति के उपरान्त प्रतिभागी पूर्णांकों के –

1. योग एवं व्यवकलन (घटाना) की अवधारणा को स्पष्ट कर सकेंगे।
2. गुणा एवं भाग की अवधारणा को स्पष्ट कर सकेंगे।

गतिविधि –1

प्रक्रिया –

- सुगमकर्ता प्रतिभागियों को चार समूहों में बाँटेगा।
- प्रत्येक समूह को एक एक प्रश्न पर चर्चा करने को कहेगा।

चर्चा प्रश्न – 1 छात्र इन प्रश्नों के हल किस किस प्रकार से करते है व क्यों?

अ) $-5 + 2$

ब) $(-5) + (-3)$

स) $2 - (3)$

द) $(-2) - (-3)$

चर्चा प्रश्न – 2 (बड़े समूहों में) – उपर्युक्त प्रश्नों पर छात्रों की अवधारणा को स्पष्ट करने हेतु आप क्या तरीका अपनाएगें।

दैनिक जीवन का सामान्य उदाहरण – रमा घर के बायीं ओर 5 किमी दूर स्थित विद्यालय जाती है। छुट्टी में घर आते समय वह विद्यालय से 2 किमी. दूरी पर स्थित दुकान से सामान खरीदती है। अब घर से रमा कितनी दूरी पर है?

इसी प्रकार के कुछ और उदाहरण सुगमकर्ता द्वारा दिये जाएगें जिससे प्रतिभागियों की यह अवधारणा स्पष्ट हो सकें कि जोड़ के प्रश्न में घटाना क्यों पड़ रहा है?

गतिविधि – 2

प्रक्रिया – सुगमकर्ता छोटे समूहों में गतिविधि करायेगा।

निम्न प्रकार के **पैटर्नस** मे दिये गये खाली स्थान भरवाकर –

अ)

6	–	5	=	1
6	–	4	=	.....
6	–	.....	=	3
6	–	2	=	.....
.....	–	1	=	5
6	–	.....	=	6
6	–	(–1)	=	.....

ब)

5	–	(–1)	=	6
5	–	(....)	=	7
.....	–	(–3)	=	8
.....	–	(–4)	=	.....
5	–	(–5)	=	.....
5	–	(–6)	=	.....

सुगमकर्ता प्रतिभागियों के साथ चर्चा करेंगे कि घटाने का गणितीय रूप निम्नाँकित है–

$6 - (-1) = 6 + 1 = 7$

$(-7) - (+1) = (-7) + (-1) = -7 - 1 = -8$

सुगमकर्ता प्रतिभागियों को इसे लाभ व हानि के व्यवहारिक प्रयोग से भी स्पष्ट कर सकते है –

(लाभ – धनात्मक, हानि – ऋणात्मक)

रु. 5 लाभ	+	रु. 3 लाभ	=	रु. 8 लाभ	5 + 3 = 8
रु. 5 लाभ	+	रु. 3 हानि	=	रु. 2 लाभ	5 + (–3) = 2
रु. 5 हानि	+	रु. 3 लाभ	=	रु. 2 हानि	– 5 + 3 = –2
रु. 5 हानि	+	रु. 3 हानि	=	रु. 8 हानि	– 5 + (–3) = –8

समेकन :

एक पूर्णांक से दूसरे पूर्णांक को घटाने का मतलब है कि दूसरे पूर्णांक का चिह्न बदलकर उसे पहले पूर्णांक में जोड़ देना।

- समान चिह्नों की संख्याओं में योग की संक्रिया होती है तथा उत्तर में बड़ी संख्या का चिह्न आता है।
- विपरीत चिह्नों की सख्याओं में घटाने की संक्रिया होती है तथा उत्तर में बड़ी संख्या का चिह्न आता है।

पूर्णांकों की गुणा **समय :** 30 मिनट

गतिविधि –3

प्रक्रिया – सुगमकर्ता प्रतिभागियों से बॉक्स में बननेवाली संख्या रेखाओं के पैटर्न को पूर्ण करवाएगें –

	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
– 4	–	–	–	–	0	–	–	–	–
– 3	–	–	–	–	0	–	–	–	–
– 2	–	–	–	–	0	–	–	–	–
– 1	–	–	–	–	0	–	–	–	–
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	–	–	–	–	0	1	2	3	4
2	–	–	–	–	0	2	4	6	8
3	–	–	–	–	0	3	6	9	12
4	–	–	–	–	0	4	8	12	16

चर्चा प्रश्न (बड़े समूह से) – इन पैटर्नस की सहायता से गणित की कौन–कौन सी अवधारणाएं स्पष्ट हो रही हैं।

समेकन

- **एक समान चिह्न वाले पूर्णांकों को गुणा या भाग करने पर उत्तर हमेशा धनात्मक आता है।**
- **अलग–अलग चिह्न वाले पूर्णांकों को गुणा या भाग करने पर उत्तर हमेशा ऋणात्मक आता है।**
- **शून्य का गुणा पूर्णांक से करने पर उत्तर शून्य आता है।**
- **शून्य से भाग करना परिभाषित नहीं है।**

  शून्य को किसी पूर्णांक से भाग करने पर उत्तर शून्य आता है।

  (दो ऋणात्मक पूर्णांकों के गुणनफल/ भागफल को पैटर्न की सहायता से स्पष्ट किया जा सकता है)

गतिविधि –4

प्रक्रिया –

- सुगमकर्ता बड़े समूह को चार छोटे समूहों में बांटेगा–

चर्चा प्रश्न

1. कक्षा शिक्षण में छात्र/छात्राएं पूर्णांकों पर संक्रियाओं में किस–किस प्रकार की गलतियां करते है व आप उनकी अवधारणा को स्पष्ट करने के लिए क्या प्रयास करते है?
   (सुगमकर्ता समूह वार प्रस्तुतीकरण करवाते हुए चर्चा करायेगा)

मूल्यांकन प्रश्न–

1. क्या समान चिह्न वाले पूर्णांकों का गुणनफल ऋणात्मक हो सकता है?
2. क्या असमान चिह्न वाले पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक हो सकता है?
3. दो समान चिह्न वाले पूर्णांकों का भागफल धनात्मक होता है या ऋणात्मक ?
4. दो असमान चिह्न वाले पूर्णांकों में भाग करने पर उत्तर किस प्रकार का पूर्णांक है?
5. आप कब कहेंगे कि बच्चे ने पूर्णांकों की संक्रियाओं (योग, व्यवकलन, गुणा व भाग) को सीख लिया है?

जरा सिर तो खुजलाइए–

मधुमक्खियों के एक झुंड का आधा भाग सरसों के खेत में शहद इकट्ठा करने गया। शेष का तीन चौथाई गुलाब के बाग में चला गया। शेष 10 मधुमक्खियां अभी निर्णय नहीं ले पाई। तो बताइये कि झुंड में कितनी मधुमक्खियां थी?

- इस जवाब को हल करते समय आपने कौन सी अवधारणा का प्रयोग किया?

समय– 50 मिनट

परिमेय संख्याए

उद्देश्य– इस सत्र के पश्चात प्रतिभागी –

- परिमेय संख्याओं की आवश्यकता को स्पष्ट कर सकेंगे।
- परिमेय संख्याओं की अवधारणा को स्पष्ट कर सकेंगे।

केस स्टडी –

मूनाकोट के विद्यालय जाजर सिंगरी में अध्यापक कक्षा में संख्या रेखा पर पूर्णांकों से सम्बन्धित चर्चा कर रहे थे तभी मीना ने पूछा–

मीना – सर, क्या संख्या रेखा पर 0 और 1 की बीच के बिन्दु भी कोई संख्या दर्शाते है?

सोनू – सर, कल मैंने और शीतल ने एक सेब आधा–आधा बांट कर खाया क्या इसे भी संख्या रेखा पर दिखाया जा सकता है?

चर्चा प्रश्न 1 –

संख्या रेखा पर दो धनात्मक पूर्णोंकों के बीच की संख्याओं का निर्धारण कैसे किया जाय?

चर्चा प्रश्न 2–

क्या यह ऋणात्मक पूर्णोंकों के साथ भी सम्भव है?

- यही प्रक्रिया ऋणात्मक पूर्णाकों के बीच अपनाने पर ऋण चिह्न के साथ भिन्नात्मक मान दिखाया जायेगा।

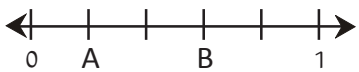
चर्चा प्रश्न 3–

क्या 0 एक परिमेय संख्या है

चर्चा प्रश्न 4–

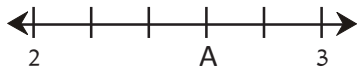
यदि ऐसे बिन्दु 2 व 3 के बीच हो तो वे क्या दर्शाते हैं?

समेकन :



- चूंकि उपरोक्त चित्र में 0 को $\frac{0}{5}$ = 0 के रूप में दर्शाया जा सकता है। अत: यह एक परिमेय संख्या है।
- इसी प्रकार 1 को $\frac{5}{5}$ के रूप में दर्शाया जा सकता है। अत: सभी पूर्णाक भी परिमेय संख्या होते है।
- 2 व 3 के बीच बराबर भाग करने पर किसी भाग को भिन्नात्मक रूप में दर्शाया जा सकता है जिसमें

2 एक पूर्णांक के रूप में आएगा तथा शेष भाग भिन्न के रूप में आयेंगे जैसे –



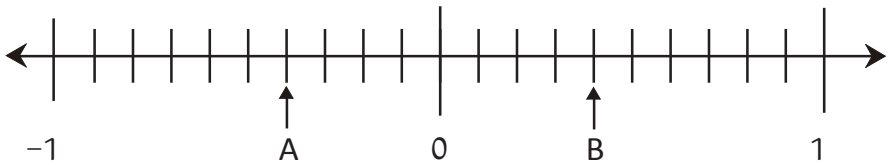
- यहां A, $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ को दर्शाता है जो एक परिमेय संख्या है व विषम भिन्न के रूप में है।
- यही प्रक्रिया संख्या रेखा के ऋणात्मक भाग की ओर भी होगी।

गतिविधि–1

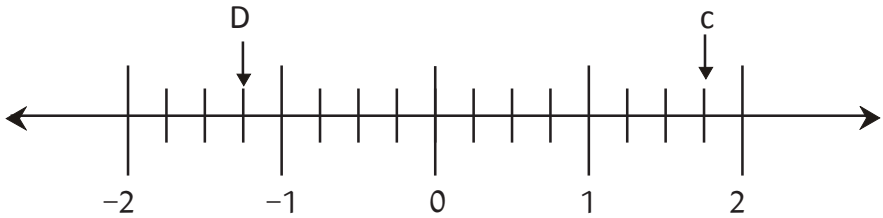
आवश्यक सामग्री– बड़ा स्केल, पेन्सिल, कागज, चार्ट, स्केच पेन आदि।

प्रक्रिया– सुगमकर्ता बड़े समूह में चर्चा करायेगा।

श्यामपट्ट पर चित्र बनायें



चित्र–1



चित्र–2

चर्चा प्रश्न

1. संख्या रेखा पर A, B, C व D किन संख्या को प्रदर्शित करते हैं।
2. A, B, C व D के मान पूर्णांक है या नहीं। क्यों?

गतिविधि –2

प्रक्रिया – सुगमकर्ता दो छोटे समूह में निम्नलिखित कार्य करवायेगा –

समूह –1 दो धनात्मक पूर्णांको 2 और 8 के बीच की 10 संख्याएँ लिखिए।

समूह –2 दो पूर्णांको –3 और 3 के बीच की 10 संख्याएँ लिखिए।

चर्चा प्रश्न (दो छोटे समूह में) : उपरोक्त संख्याओं से बनने वाले विभिन्न प्रकार के संख्या समूहों पर चर्चा कीजिए।

समेकन :

सुगमकर्ता को उपरोक्त के सन्दर्भ में निम्नलिखित संख्या समूह प्राप्त हो सकते है –

- प्राकृत संख्यांए, पूर्ण संख्याएं, पूर्णांक, भिन्न संख्याएं, भिन्न संख्याएं जिसमें ऋण चिह्न है।
- परिमेय संख्या p/q के रूप में लिखी जा सकती है जहाँ q का मान शून्य नहीं हैं तथा p, q दोनों पूर्णांक हैं।
- सभी पूर्णांक परिमेय संख्या हो सकते हैं किन्तु सभी परिमेय संख्याएं पूर्णांक नहीं होती।

जरा सिर तो खुजलाइए–

नीचे दिए गये वर्ग में क्या खास बात है– ढूंढिए –

3	–4	1
–2	0	2
–1	4	–3

अनुक्रमणिका

प्रारम्भिक बीजगणित

प्राक्कथन : प्रारम्भिक बीजगणित

गणित में जब भी इसकी शाखाओं की बात आती है तो उच्च प्राथमिक स्तर पर प्राय: बीजगणित को अधिक कठिन रूप में देखा जाता है। हम यहां एक कोशिश कर रहे है कि गणित की इस शाखा को दो स्तर पर ठीक से समझा जाए पहला यह कि अवधारणा के स्तर पर क्या है, इसके विकास की अवस्थाएं क्या रही, और दूसरा इसे कक्षा-कक्ष में किस तरह से रखा जाए कि यह इसके बारे में अब तक बनी छवि को भी तोड़ पाए और व्यवहारिक जीवन से भी जोड़ पाये। इस दिशा में हम कितना कर पाते है यह हम सब पर निर्भर होगा। बीजगणित की अवधारणाओं पर बच्चों के साथ कक्षा छ: से काम शुरू किया जाता है। यह मॉडयूल बीजगणितीय अवधारणों पर समझ बनाने एवं बच्चों के साथ किए जाने वाले काम के तरीकों को रखने का एक प्रयास है। इस मॉडॅयूल में हम बीजगणितीय विचार एवं उसकी विकास की अवस्थायें, बीजगणित की पूर्व अवधारणा (Pre Algebraic concept) बीजगणित शब्दावली से परिचय, बीजगणित का दैनिक जीवन से कैसे सम्बन्ध है, कैसे चर-अचर से परिचय कराया जाय आदि पर समझ साझा करने का प्रयास कर रहे हैं, एक चर वाली समीकरणों का दैनिक जीवन में उपयोग के अतिरिक्त कक्षा कक्ष में आने वाली समस्याओं को शामिल कर उन पर भी ध्यान आकर्षित करने का प्रयास कर रहे हैं।

विषयवस्तु –बीजगणित

बीज गणित के विकास के चरण

गतिवधि–1 **समय :** 35 मिनट

उद्देश्य–

इस सत्र की समाप्ति के उपरांत प्रतिभागी –

- बीजगणित के विकास के क्रम में तीन स्तरों शाब्दिक अवस्था, संक्षिप्त अवस्था तथा सांकेतिक अवस्था की अवधारणा को स्पष्ट कर सकेंगे।

आवश्यक सामग्री– चार्ट, स्केच पेन।

प्रक्रिया– सुगमकर्ता प्रतिभागियों के 5 समूह बनाकर, प्रत्येक समूह को 1–1 प्रश्न हल करने को देंगे।

Group 1 : सोने की 120 गिन्नियों को चार लोगों में $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ और $\frac{1}{12}$ के अनुपात में बांटा गया। बताइए प्रत्येक को कितनी गिन्नियाँ मिली?

Group 2 : यदि हम कुछ सेब तीन लोगों में इस तरह बांटना चाहें जिससे कि पहले व्यक्ति को कुल सेबों का आधा हिस्सा मिले, दूसरे को एक तिहाई और तीसरे व्यक्ति को 3 सेब मिल जायें तो हमे कुल कितने सेब चाहिए होंगे?

Group 3 : दो व्यक्ति अपने बैलों को लेकर साथ–साथ जा रहे थे। पहले व्यक्ति ने कहा कि यदि तुम अपने बैलों में से दो बैल मुझे दे दो तो हम दोनों के बैलों की संख्या बराबर हो जाएगी। इस पर दूसरे ने कहा कि यदि तुम मुझे दो बैल दे दो तो मेरे पास तुमसे दोगुने बैल हो जायेंगे। क्या आप बता सकते है कि दोनों के पास कितने–कितने बैल थे?

Group 4 : डेविड गीता से चौबीस वर्ष बड़ा हैं। यदि दस वर्ष पहले डेविड की उम्र गीता की उम्र से पांच गुनी थी तो दोनों की वर्तमान उम्र क्या है?

Group 5 : दो अंको की एक संख्या के दोनों अंको को मध्य का अंतर तीन है। यदि दोनों अंको को आपस में बदल दिया जाय तथा इस प्रकार प्राप्त नयी संख्या को पहले वाली संख्या में जोड़ दिया जाय तो योगफल के रूप में 143 प्राप्त होता है बताइए कि मूल संख्या क्या थी?

चर्चा प्रश्न– सुगमकर्ता प्रतिभागियों से निम्नलिखित प्रश्नों पर चर्चा करायेंगे।

- दिए गए प्रश्नों को आपने कितने चरणों में अथवा किन–किन तरीकों से हल किया?
- प्रश्नों को हल करते समय आपके मस्तिष्क मे क्या क्या प्रक्रियाएँ चल रही थी ?

समेकन –

सुगमकर्ता सभी उत्तरों को बोर्ड पर लिखेंगे तथा उनके तीनों स्तरों, शाब्दिक अवस्था, संक्षिप्त अवस्था तथा सांकेतिक अवस्था से जोड़ते हुए, एक और उदाहरण के साथ इस अवधारणा को स्पष्ट करेंगे।

• **शाब्दिक अवस्था**	:	यदि सलमा के पास पांच रूपये थे, पीटर ने उसे कुछ रूपये और दे दिए अब उसके पास दस रूपये हैं, बताइए पीटर ने सलमा को कितने रूपये दिए?
• **संक्षिप्त अवस्था**	:	5 रूपये + कुछ रूपये =10 रूपये
या		कुछ रूपये (पीटर ने सलमा को दिए) = 10 रु. – 5 रु.
		= 5 रु.
• **सांकेतिक अवस्था**	:	माना पीटर ने सलमा को x रूपये दिए
		$5 + x = 10$
या		$x = 10 - 5 = 5$ रुपये

(इस सत्र समाप्ति के बाद सुगमकर्ता पठन सामग्री –3 **"बीजगणित के विकास के चरण एवं उसकी अवस्थाएं" और "भारतीय गणितज्ञों का मुख्य योगदान"** पढ़ने को देंगे)

(बीजगणित की आवश्यकता और उसका चिंतन)

गतिविधि–2

समय : 45 मिनट

उद्देश्य – इस सत्र की समाप्ति के उपरांत प्रतिभागी

- बीजगणितीय चिंतन की अवधारणा को स्पष्ट कर सकेंगे।
- प्रतिभागी प्रश्नों को हल करने मे बीजगणितीय चिंतन का उपयोग कर सकेंगे।
- प्रतिभागी समय बचाने में बीजगणितीय प्रक्रिया को स्पष्ट कर सकेंगे।

आवश्यक सामग्री – चार्ट , स्केच पेन , वर्कशीट (courtesy - prof. - K. - Subramanian-HBCSE)

गतिविधि

सन्दर्भदाता प्रतिभागियों के सात समूह बनाकर निम्नलिखित प्रश्नों को बिना बीजगणित की सहायता अलग–अलग तरीकों से हल करने तथा समूहवार प्रस्तुति करने को कहेंगे, इन तरीकों को अधिक प्रभावशाली बनाने हेतु आपके क्या सुझाव हैं?

वर्क शीट –

Group 1 –	5 चाय एवं 4 ब्रेड पकोड़ों की कीमत 37 रूपये तथा 4 चाय एवं 5 ब्रेड पकोड़ों की कीमत 35 रूपये हो तो तो एक चाय और एक पकोड़े की कीमत बताइए?
Group 2 –	कॉफी की कीमत में 20% की वृद्धि होने पर एक व्यक्ति अपनी कॉफी के उपयोग को 20% कम करता है, तो उसके खर्च पर क्या प्रभाव पड़ेगा? (कम होगा, बढ़ेगा या समान रहेगा, प्रतिशत में बताइये)
Group 3 –	एक आयत का परिमाप बदले बिना यदि उसकी लंबाई को बदले तो उसके क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ेगा? उदाहरण सहित बताइये।
Group 4 –	एक पिता की आयु अपने पुत्र से 30 वर्ष अधिक है ? 10 वर्ष पहले यदि पिता की आयु, पुत्र की आयु से चार गुनी थी तो दोनों की वर्तमान आयु क्या है ?

Group 5 – हरि के पास 350 रूपये है जो 10 रु और 5 रू. के सिक्के के रूप में है । यदि हरि के पास कुल 50 सिक्के हैं तो बताइए उसमे से कितने सिक्के 10 के हैं और कितने 5 के होंगे ?

Group 6 – एक कार जब पहाड़ की चढ़ाई पर चल रही थी तो उसकी गति 40 किलोमीटर/घंटा थी लेकिन जैसे ही कार पहाड़ की ढलान पर चलने लगी तो गति 60 किमी. /घंटा हो गई तो कार की औसत गति क्या रही होगी ?

Group 7 – एक मोबाईल कंपनी100 रूपये के मासिक किराये पर कॉल रेट 1.20 रूपये प्रति मिनट तथा दूसरी कम्पनी 75 रूपये मासिक किराये पर कॉल रेट 1.40 रूपये प्रति मिनट देती है। कौन सी कंपनी का प्लान रेट सस्ता रहेगा ?

समेकन : सुगमकर्ता चर्चा के उपरांत समूह को इस निष्कर्ष पर पहुँचायेगा कि

- समस्या समाधान में यदि उपरोक्त प्रश्नों को बीजगणितीय प्रक्रिया से हल किया जाता तो शायद समय कम लगता।
- बीजगणित व्यापकीकरण या सामान्यीकरण की प्रक्रिया है।

(सत्र समाप्ति के उपरान्त सुगमकर्ता पठन सामग्री–4 **"बीजगणितीय चिंतन"** पढ़ने को देंगे)

समय : 40 मिनट

पैटर्न से बीजगणित की ओर

गतिविधि–3

उद्देश्य – इस सत्र की समाप्ति के बाद प्रतिभागी विभिन्न ज्यामितीय अनुक्रम (Pattern) से बीजगणित की अवधारणा को स्पष्ट कर सकेंगे।

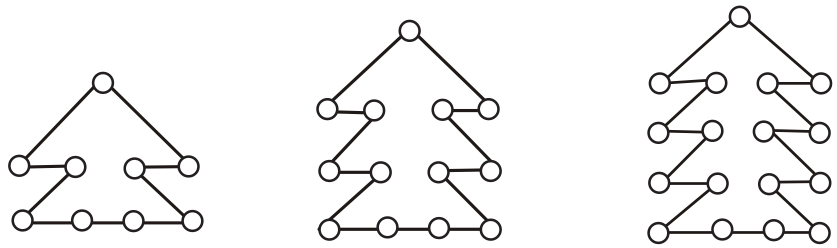
आवश्यक सामग्री– चार्ट पेपर, पतंगी कागज, कैंची, स्केच पेन

प्रक्रिया – सुगमकर्ता निम्नलिखित दो पैटर्नों को चार्ट पेपर पर बनाकर प्रतिभागियों से चर्चा कराएं ?

पैटर्न – 1

नीचे अलग–अलग आकार के क्रिसमस ट्रीज में लगे बल्बों को देखकर सारणी को पूरा कीजिए–

पेड़ के शंक्वाकार घेरों की संख्या	2	3	4	5	6	7	8	9	10
बल्बों की संख्या	9	13	17						



चर्चा प्रश्न–

1. 16 शंक्वाकार घेरे वाले पेड़ के आकार के क्रिसमस ट्री के लिए, कितने बल्बों की आवश्यकता होगी ?
2. 100 क्रिसमस ट्री के लिए, कितने बल्बों की आवश्यकता होगी ?
3. अगर आप को किसी भी आकार के क्रिसमस ट्री में लगने वाले बल्बों की संख्या पूछी जाय तो आप क्या बतायेंगे ?
4. पेड़ो के शंक्वाकार बल्बों की संख्या को बीजगणितीय समीकरण के रूप में कैसे लिखेंगे। (अगर पेड़ों के शंक्वाकार घेरों की संख्या को S और बल्बों की संख्या को n के रूप मे लिखा जाय।

पैटर्न– 2

एक रेस्त्रां में वर्गाकार डिनर की मेज पर एक लाईन मे चित्र के अनुसार बैठ सकते है नीचे की गई सारणी को पूरा कीजिए ?

डिनर टेबल	व्यक्तियों की सख्यां
1 	4
2 	6
3	
4	
5	
6	
7	

चर्चा प्रश्न –

1 अगर हम हर बार पंक्ति में एक टेबल बढ़ाते है तो कितने लोग बैठ सकते हैं ?

2. क्या आप बता सकते हैं कि 17 डाईनिंग टेबल एक ही पंक्ति में रखे तो कितने लोग एक साथ बैठकर खाना खा सकते हैं ?
3. n टेबल एक ही पंक्ति में रखी हो तो कितने लोग एक साथ खाना खा सकते हैं ?

पैटर्न 3

राजकीय उच्च प्राथमिक विद्यालय पिलंग के प्रधानाध्यापक ने सभी बच्चों के लिए अच्छे पाठक की प्रतियोगिता का आयोजन किया गया। कक्षावार जीतने वाले बच्चों को एक एक लॉलीपॉप टॉफी पुरस्कार के रूप में दी जाती है। प्रधानाचार्य जी ने लॉलीपॉप का एक बक्सा खरीदा जिसमें 800 टॉफियां हैं।

प्रधानाध्यापक जी प्रतिदिन 7 लॉलीपॉप बतौर पुरस्कार कक्षावार 1 से 7 तक देते हैं।

1. 4, 6, 10, 20, 34 और 45 दिनों के बाद में टॉफियों के बक्से में कितनी टॉफिया शेष बचेगी ?
2. क्या आप ऐसा कोई नियम या सूत्र बना सकते हैं जिससे यह ज्ञात हो जाय कि किसी भी दिन के बाद कितनी टॉफिया बक्से में शेष रहेगी।
3. प्रधानाध्यापक जी "अच्छे पाठक" की प्रतियोगिता कितने दिनों तक चला पाएंगे।

समय : 40 मिनट

संख्याओं से सम्बंधित पैटर्न–

सामान्य कथनों को सिद्ध करने के लिए बीजगणित एक महत्वपूर्ण साधन है। अंकगणित के विशेष उदाहरण सामान्य तर्क देते हैं। इन्हीं सामान्य तर्कों को कुछ प्रतीकों की सहायता से प्रदर्शित किया जाता है। यहाँ यह समझना आवश्यक है कि ये प्रतीक, समस्या से क्या सम्बन्ध रखते हैं। बीजगणित भाषा की सहायता से हम गणितीय अन्तर्सम्बन्धों को व्यक्त कर पाते हैं। इन्हीं बीजगणितीय अभिव्यक्ति की सहायता से हम समस्या का समाधान निकाल पाते हैं।

पैटर्न–1

$10 \times 1 = 10$

$10 \times 2 = 20 \quad \Longrightarrow \quad 10 \times n = 10n$

$10 \times 3 = 30$

पैटर्न–2

$$1 \times 3 + 1 = 2^2$$
$$2 \times 4 + 1 = 3^2 \qquad \Rightarrow n(n+2)+1 = (n+1)^2$$
$$3 \times 5 + 1 = 4^2$$

पैटर्न–3

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \qquad \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

पैटर्न -4

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{3}-\frac{2}{7}=\frac{1}{21} \quad \Rightarrow \frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n(2n+1)}$$
$$\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{1}{36}$$

उपरोक्त चारों पैटर्नस के सामान्यीकरण साथ में दिए गये हैं -

1. क्या आप भी इसी प्रकार से संख्याओं के पैटर्न देखकर सामान्यीकरण कर सकते हैं? कोई चार उदाहरण दीजिए।

   (सुगमकर्ता प्रतिभागियों को 4 समूह मे बांटकर प्रत्येक से इसी प्रकार के कोई दो पैटर्न बनाकर उनके व्यापक नियम प्रस्तुत करने को कहेगा)

समेकन :

इन सभी पैटर्नस के अध्ययन से निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होता है।

- पैटर्न के आधार पर व्यापक नियम प्राप्त किया जा सकता है।

जरा सिर तो खुजलाइये -

दिये गये वर्ग में खास बात क्या है? ढूँढिये एवम् इस वर्ग के रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

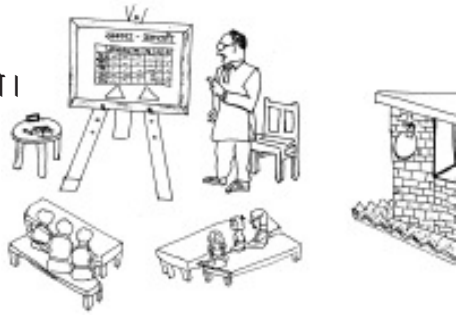
−6		−1	3
7	−5	2	
		8	
0			5

समय : 40 मिनट

चर और अचर की अवधारणा

उद्देश्य– सत्र की समाप्ति के पश्चात प्रतिभागी

- अंक और बीज में अंतर स्पष्ट कर पाएंगे।
- बीज (PRONUMERAL) का अर्थ छात्रों को स्पष्ट कर सकेंगे।
- चर और अचर की व्याख्या कर सकेंगे।



गतिविधि 4.1 –

प्रक्रिया

सुगमकर्ता प्रतिभागियों को एक चित्र दिखायेंगे व साथ में दी गयी सूचनाओं के आधार पर संभावित उत्तरों पर चर्चा के साथ सारणी की पूर्ति की जायेगी !

कथन –चित्र के साथ दी गयी सूचनाओं के आधार पर नीचे दी गयी सारणी में रिक्तियों की पूर्ति कीजिए

विद्यालय लगने का समय – 7.30 प्रात: से 12.30 अपराह्न
विद्यालय में कुल शिक्षकों की संख्या – 5
विद्यालय में कुल पंजीकृत बच्चों की संख्या – 180
विद्यालय में चलने वाले वादनों की संख्या – 8

क्र. सं.	सूचना प्रश्न	परिवर्तनशील	निश्चित मान
1	विद्यालय लगने का समय		
2	विद्यालय में बच्चों की कुल संख्या		
3	विद्यालय में किसी दिन आने वाले बच्चों की संख्या		
4	प्रतिदिन पढ़ाये जाने वाले पाठों की संख्या		
5	विद्यालय पर पड़ने वाली धूप की मात्रा		
6	विद्यालय में शिक्षकों की संख्या		
7	विद्यालय में होने वाले वादनों की संख्या		
8	विद्यालय से किसी दिन अनुपस्थित बच्चों की संख्या		
9	विद्यालय के अंदर आने वाली चिड़ियों की संख्या		
10	किसी कक्षा में उपस्थित शिक्षकों की संख्या		

समेकन –

- संख्या का अपना एक निश्चित मान होता है अत: इन्हें अपरिवर्तनशील या अचर कहते हैं।
- जिस वस्तु या संख्या का मान परिवर्तनशील है वह चर राशि होती है।

नोट– चर और अचर से सम्बन्धित अवधारणात्मक भ्रांतियां –

कुछ बच्चे सोचते है कि अक्षर उन चीजों को दर्शाता है जिनके नाम इस अक्षर से शुरू होते है जैसे– 3a में a सिर्फ apple या aeroplane को दर्शाते है Banana को नहीं क्योंकि तब तो वह 3b होगा।

इस धारणा का कारण यह हो सकता है कि बच्चे इकाइयों के लिए लघुरूपों का प्रयोग कर रहे हैं। जैसे 3 मीटर के लिए 3मी. या 3m.।

(इस सत्र के बाद पठन सामग्री (पठन साम्रगी–4) बीजगणित शिक्षण और अधिगम पढ़ने को देंगे)

जरा सिर तो खुजलाइये

तीन पात्र है, उनमें से एक में पूरा 10 ली. दूध ही आता है तथा वह पूरा भरा हुआ है बाकी दोनों पात्रों में क्रमश: 7 लीटर और 3 लीटर दूध आता है। पात्रों में कोई मापन चिन्ह नहीं है। एक ग्राहक ने 5 लीटर दूध मांगा। आप उसे उतना दूध कैसे देंगे?

अ) इस सवाल को हल करते हुए आपने कौन सी अवधारणाओं का उपयोग किया है?

ब) इस समस्या को और कितने तरीकों से हल किया जा सकता है? उसे लिखिये।

समय : 50 मिनट

बीजीय ब्यंजकों की आधारभूत संक्रियाएं

उद्देश्य – इस सत्र की समाप्ति के पश्चात प्रतिभागी

- आंकिक व्यंजको (NUMERICAL EXPRESSIONS) को स्पष्ट कर सकेंगे।
- बीजीय व्यंजकों में चर की भूमिका को स्पष्ट कर सकेंगे।
- बीजीय व्यंजक बना पायेंगे ।
- बीजीय व्यंजकों में पद एवम गुणांको की पहचान कर सकेंगे।
- समान– असमान पदों को पहचान सकेंगे।

गतिविधि–1

आवश्यक सामग्री – चार्ट पेपर (नीचे दी गयी तालिका के साथ)

प्रक्रिया

1. सुगमकर्ता प्रतिभागियों को चर्चा प्रश्नों के साथ निम्नलिखित तालिका को क्रमवार भरवाएंगे
2. तालिका के माध्यम से व्यंजको के प्रकार व व्यंजकों में – चर–अचर , गुणांक–पद , समान–असमान को स्पष्ट करते चलेंगे !
3. अंत में समेकन के अनुसार इनमें होने वाली त्रुटियों को इंगित किया जाय।

क्र.सं.	कथन	व्यंजक
1.	संख्या चार और दो का योग	
2.	संख्या से नौ अधिक	
3.	किसी संख्या तीन गुने में चार जोड़ना	
4.	किसी तालाब में 10 मछलियां और कुछ मेंढक हैं और थोड़ी मछलियां मछुआरा ले गया है	
5.	किसी कक्षा के बच्चों में 100 रुपये बराबर बराबर बाँटने हैं	
6.	राम और उसके पिता की वर्तमान आयु तथा उनकी पांच वर्ष बाद की आयु का योग	

चर्चा प्रश्न

1. क्रम संख्या 1 पर आने वाले व्यंजक में कितनी चर राशियाँ हैं? (यदि 'नहीं हैं' उत्तर आये तो सुगमकर्ता इसे अंकों के बीच संक्रिया होने से अंकगणितीय व्यंजक के रूप में निष्कर्ष निकालेंगे)
2. क्रम संख्या दो में 'संख्या + 9 लिखने के स्थान पर संक्षिप्त रूप में कैसे लिखेंगे? (x + 9 का उत्तर

प्राप्त होने पर सुगमकर्ता चर के उपयोग से व्यंजकों का संकेतीकरण होने के साथ लिखने में आसानी को इंगित करेंगे) !

3. क्रम संख्या ३ में संख्या का कितना गुना है ? (तीन गुना उत्तर आने पर उसे पुन: पूछा जाय कि गुणांक कौन है ? ?...फिर सुगमकर्ता निष्कर्ष देंगे 3 गुणांक है जबकि $3x$ एक पद है (अब क्रम संख्या 4 व 5 में सुगमकर्ता पद व गुणांक व उनकी संख्या के बारे में पूछेंगे!

4. क्रम संख्या 6 वाले व्यंजक में राम की आज की आयु व पांच वर्ष बाद की आयु में कौन सा चर पुन: उपयोग हुआ है ? (x उत्तर आने पर पुन: इसी प्रकार पिता की आयु के लिए पूछा जाएगा और y उत्तर आने पर सुगमकर्ता निष्कर्ष रूप में समान और असमान पदों का परिचय देंगे) !

समेकन –

- व्यंजक बनाने के लिए अचर की अचर के साथ अथवा अचर की चर के साथ गणितीय संक्रियाएं होनी आवश्यक हैं।
- चर के साथ अचर की गुणा होने पर प्राप्त व्यंजक में अचर राशि को चर का गुणांक कहते हैं
- व्यंजक 20 y को y 20 भी कहते है किन्तु परिपाटी के रूप में अचर पहले व चर बाद में लिखा जाता है , अत: इसे 20 y लिखा जाएगा।
- 5 $x + y$ में x का गुणांक 5 है व y का गुणांक 1 है (गुणांक 0 अथवा 'कुछ नहीं' का न होना स्पष्ट किया जाय)
- वे पद जिनमें चर राशियाँ समान होती हैं उन्हें समान पद व भिन्न भिन्न चर राशियों वाले पद असमान पद कहलाते हैं
- 12 xy व $2yx$ को समान पदों के रूप में लिया जाय व स्पष्ट किया जाय कि चरों के क्रम का समान पदों पर प्रभाव नहीं पड़ता!

गतिविधि–2

उद्देश्य–

- प्रतिभागी एकपदीय (monomial), द्विपदीय (binomial) त्रिपदीय (trinomial) और बहुपदीय (polynomial) बीजीय व्यंजको की पहचान कर सकेंगे।
- प्रतिभागी बीजीय व्यंजकों के अवधारणात्मक पहलुओं और प्रक्रियाओं की पहचान कर सकेंगे।

आवश्यक सामग्री – चार्ट

चर्चा बिंदु

- गतिविधि 1 के आधार पर एकपदीय (monomial), द्विपदीय (binomial) त्रिपदीय (trinomial) और बहुपदीय (polynomial) गुणधर्म के आधार पर छाँटना।

समेकन –

- द्विपदीय व्यंजकों के जोड़ और घटाने की प्रक्रिया में इस बात का होना आवश्यक है।

  सजातीय आपस में जुड़ और घट जाते है जबकि विजातीय वैसे ही रहते है तथा इस प्रकार प्राप्त व्यंजक ही अंतिम होता है।

बीजीय व्यंजकों की संक्रियाएँ (जोड़ तथा घटाना)

समय– 80 मिनट

उद्देश्य– इस सत्र की समाप्ति के पश्चात प्रतिभागी

1. अंकगणितीय योग तथा घटाने की संक्रियाओं के नियम तथा बीजगणितीय योग तथा घटाने संक्रियाओं के नियमों में समानता को स्पष्ट कर सकेंगे।
2. एकपदीय समान और असमान बीजीय व्यंजकों के योग की संक्रिया को स्पष्ट कर सकेंगे।
3. बहुपदीय समान और असमान बीजीय व्यंजकों के योग की संक्रिया को स्पष्ट कर सकेंगे।
4. एकपदीय समान और असमान बीजीय व्यंजकों के व्यवकलन/ घटाना (subtraction) की संक्रिया को स्पष्ट कर सकेंगे।
5. बहुपदीय समान और असमान बीजीय व्यंजको के व्यवकलन/घटाना (subtraction) की संक्रिया को स्पष्ट कर सकेंगे।

गतिविधि–3

आवश्यक सामग्री – विभिन्न रंगों के कार्ड, स्केच पेन, चार्ट पेपर, मार्कर

प्रक्रिया :

सुगमकर्ता प्रतिभागियोंके तीन समूह बनाऐंगे पहले समूह को +1 लिखे सफेद कार्ड व –1 लिखे सलेटी कार्ड देंगे पुनः दूसरे समूह को +P लिखे नीले कार्ड व –P लिखे पीले कार्ड देंगे इसी प्रकार तीसरे समूह को + Q लिखे हरे कार्ड व –Q लिखे लाल कार्ड देंगे अब प्रत्येक समूह को निम्नवत प्रश्न हल करने को देंगे –

समूह 1 हेतु कार्ड्स–

सफेद कार्ड	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
ग्रे/सलेटी कार्ड	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

समूह 2 हेतु कार्ड्स–

नीला कार्ड	+ P	+ P	+ P	+ P	+ P	+ P	+ P	+ P	+ P
पीला कार्ड	- P	- P	- P	- P	- P	- P	- P	- P	- P

समूह 3 हेतु कार्ड्स–

हरा कार्ड	+ Q	+ Q	+ Q	+ Q	+ Q	+ Q	+ Q	+ Q	+ Q
लाल कार्ड	- Q	- Q	- Q	- Q	- Q	- Q	- Q	- Q	- Q

समूह 1 हेतु प्रश्न	**समूह 2 हेतु प्रश्न**	**समूह 3 हेतु प्रश्न**
• 2 + 3 = ?	i) 2P + 3P = ?	i) 2Q + 3Q = ?
• 6 - 4 = ?	ii) 6P - 4P = ?	ii) 6Q - 4Q = ?
• -2 + 5 = ?	iii) - 2P + 5P = ?	iii) -2Q + 5Q = ?
• -3 - 6 = ?	iV) -3P - 6P = ?	iV) -3Q - 6Q = ?

(सुगमकर्ता यह स्पष्ट करते चलें कि जितनी संख्या हैं उतने कार्ड लिए जाएं धनात्मक संख्याओं के लिए सफेद, नीले व हरे कार्ड जबकि ऋणात्मक संख्याओं के लिए सलेटी, पीले, लाल कार्ड लिए जाएं व संक्रिया का उत्तर पाने हेतु समान धन व ऋण कार्डों के जितने जोड़े बन जाएं अर्थात शून्य या निरस्त हो जांय उन्हें हटा दिया जाय व शेष कार्डस की संख्या ही उत्तर होगी) अब प्राप्त उत्तरों पर चर्चा की जाय कि क्या वे समान हैं अथवा असमान ? यदि समान हैं तो किन अर्थों में अथवा असमान हैं तो किन अर्थों में?

चर्चा प्रश्न 2

अब सुगमकर्ता नीचे लिखी संख्याओं के अनुसार तीनों समूहों से कार्ड्स मंगवाएंगे –

i) 3P + 4 ii) 2 – 4Q iii) 2P + 3Q

iv) 2Q – 5 v) P – 3Q + 2

और चर्चा करेंगे क्या इन्हें और संक्षिप्त रूप में लिखा जा सकता है? (विजातीय पदों को अधिक संक्षिप्त न किया जा सकना स्पष्ट होते ही नियम देंगे विजातीय पद नहीं जोड़ें जा सकते यथा दैनिक जीवन में कुर्सियों की संख्या को मेजों की संख्या में तथा गेंदों की संख्या को बल्लों की संख्या में जोड़कर वास्तविक स्थिति स्पष्टत: नहीं बताई जा सकती है)

चर्चा प्रश्न 3

उपरोक्त संख्याओं में पहली संख्या, दूसरी संख्या व तीसरी संख्याओं को जोड़ने पर कितना आएगा?

(3P + 4 + 2 – 4Q + 2P + 3Q)

(सुगमकर्ता किसी एक प्रतिभागी को बुलाकर कुल कार्ड्स की संख्या बताने को कहेंगे व ध्यान रखा जाय कि समान धन व ऋण कार्ड का प्रत्येक जोड़ हटा दिया जाय व इस प्रकार प्राप्त संख्या – 5P + Q.6 को श्यामपट्ट पर लिखेंगे) इसी प्रकार चौथी संख्या व पांचवीं संख्या को जोड़ने पर कितना आएगा ? (2Q – 5+ P–3Q+2) के उत्तर में प्राप्त संख्या P – Q – 3 को किसी अन्य प्रतिभागी से गिनावाकर श्यामपट्ट पर लिखा जाय)

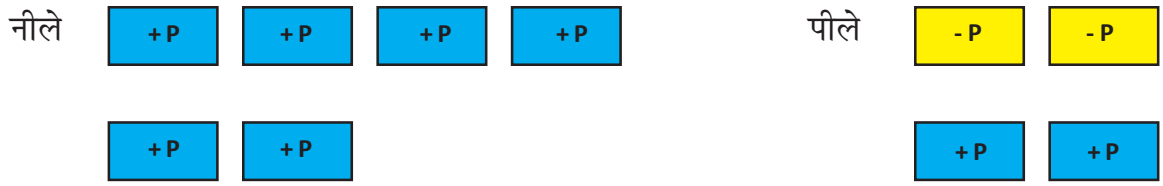
चर्चा प्रश्न 4 सुगमकर्ता प्रश्न श्यामपट्ट पर लिखेंगे 4P – (-2P) =?

(सुगमकर्ता चार +P के कार्ड लेंगे अब पूछेंगे कि क्या किसी संख्या में शून्य जोड़ने पर उसका मान बदलता है? उत्तर 'नहीं' के रूप में मिलने पर कहेंगे इसमें दो शून्य अर्थात दो शून्य बनाने वाले जोड़े दो नीले P व दो पीले P जोड़े जायं।

पुन: पूछा जाय कि प्रश्न में चार P में से क्या घटाया जा रहा है? उत्तर -2P मिलने पर दो पीले कार्ड हटा दिए जायेंगे अब शेष कार्ड किसी प्रतिभागी से गिनवाए जाएं तो प्राप्त उत्तर +6P होगा

अथवा

सुगमकर्ता चार नीले +P के कार्ड लेंगे व दो पीले -P वाले कार्ड लेंगे अब दो पीले कार्ड को शून्य करने हेतु दो नीले +P वाले कार्ड उनके साथ जोड़ने होंगे , किन्तु यदि दो नीले + P कार्ड यहाँ जोड़े जा रहे हैं तो चार +P वाले कार्ड के साथ भी जोड़े जाने चाहिए। अब दो शून्य बन जाने से उन्हें हटा दिया जाएगा व शेष + P वाले कार्ड गिनवा लिए जायेंगे जो उत्तर है।



समेकन :

- समान पदों के योग या अंतर एक अन्य समान पद होता है जो जिसका गुणांक उन समान पदों के गुणाकों के योग या अन्तर के बराबर होता है।
- यदि संक्रिया न हो रही हो तो धनात्मक पदों के पूर्व में धन चिन्ह आवश्यक नहीं होता जिस पद के पूर्व में कोई चिन्ह न लगा हो उसे धनात्मक माना जाता है।
- दो असमान पदों का योग अथवा अंतर किसी एक पद के रूप में नहीं किया जा सकता। अत: उसे संक्रिया के रूप में ही यथावत लिखा जाता है।

बीजीय व्यंजको के जोड़ और घटाने से संबंधित अवधारणात्मक त्रुटियाँ।

केस स्टडी-1

सलमा की शिक्षिका ने बीजगणितीय जोड़ का एक सवाल दिया ,

सवाल : 5a + 6 + 2a = ?

सलमा का उत्तर = 13 a

केस स्टडी-2

कक्षा 7 मे बीजीय व्यंजको के जोड़ और घटाने के कुछ सवाल गृहकार्य के लिए दिए गए और डेविड के उत्तर निम्नवत थे

$$2x + 3y = 5xy$$
$$x+y+2x = 3xy$$
$$2x+5y-3x = 4xy$$
$$(2x-y)+y = 2xy$$
$$3x-2x+y = xy$$

केस स्टडी-3

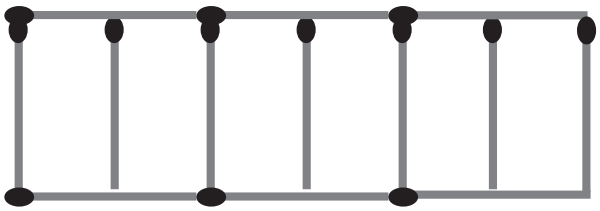
कुछ बच्चे यह नहीं समझ पाते कि पदों पर संक्रियाओं के नियम कैसे लागू करें। जैसे कुछ बच्चे $4x + x + 6x = 10$ लिख देते हैं।

चर्चा प्रश्न

- उपरोक्त केस स्टडीज में बच्चे क्या गलती कर रहे हैं?
- बच्चे ऐसी गलतियां क्यों कर रहे हैं?
- इन गलतियों मे सुधार के लिए आपके सुझाव क्या हैं?

जरा सिर तो खुजलाइये –

13 तीलियों की सहायता से नीचे भेड़ों के रहने का स्थान बनाया गया है। लेकिन क्या आप 12 तीलियों की सहायता से समान आकार के 6 खाने बना सकते हैं?



समय : 80 मिनट

बीजीय व्यंजकों का गुणन

उद्देश्यः–इस सत्र की समाप्ति के पश्चात प्रतिभागी –

- बीजीय पदों में गुणन की संक्रिया को स्पष्ट कर पायेंगे।
- बीजीय पदों में गुणन की संक्रिया के दौरान घात के नियमों की व्याख्या कर पायेंगे।
- बीजीय पदों में गुणन की संक्रिया के दौरान चिन्हों की गुणा को स्पष्ट कर पायेंगे।

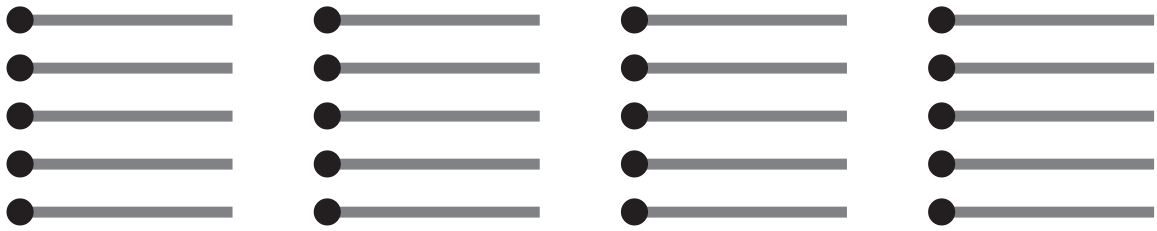
गतिविधि– 1

उद्देश्यः– अंकगणितीय गुणा से बीजगणितीय गुणा की ओर बढ़ना तथा बीजीय व्यंजकों में गुणा की अवधारणा को समझना।

सामग्री–चार्ट, माचिस की तीलियां बोर्ड, मार्कर या चॉक गोंद।

प्रक्रिया–

सुगमकर्ता प्रतिभागियों को माचिस की तीलियों को चार्ट पर चिपका कर दिखाए। इसको नीचे चित्र में दिखाया गया है। चित्र को दिखाने के बाद सुगमकर्ता प्रतिभागियों से सवाल करे कि इस आकृति में कुल कितनी तीलियों का उपयोग किया गया है, इसको पता करने के लिये क्या –क्या तरीके हो सकते हैं ?



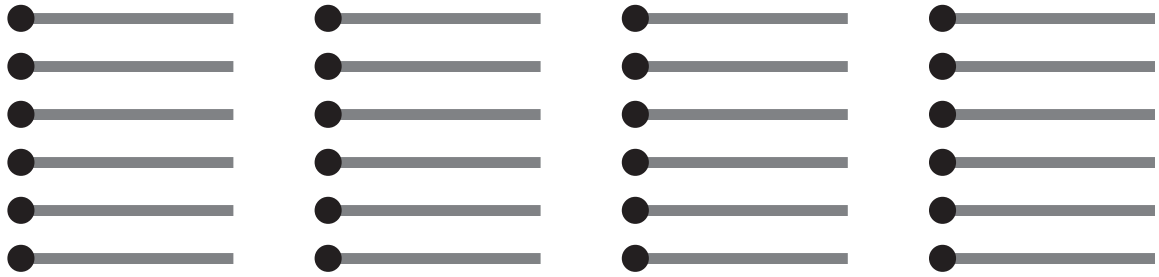
प्रतिभागियों की ओर से आने वाले संभावित जवाब–

- सीधे एक–एक गिनकर।
- पांच के समूह को 4 से गुणा करके।
- चार चार के समूह को 5 से गुणा करके।

लम्बाई के अनुदिश तीलियों की संख्या तथा चौड़ाई के अनुदिश तीलियों की संख्या को गिनकर उन्हें आपस में गुणा करके।

जैसेः– 4 गुणा 5 या 4×5 या $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5$

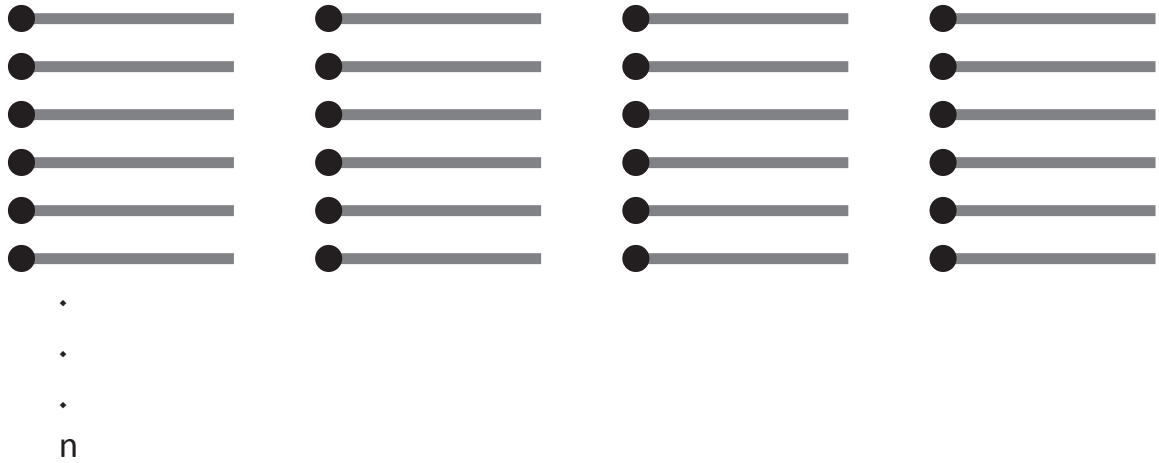
चित्र-2



यहां सुगमकर्ता चित्र-2 को प्रतिभागियों को दिखाकर सवाल करे कि अब इसमें कुल कितनी तीलियां है ?

यहाँ प्रतिभागी ऊपर बताये गये तरीके का उपयोग करके बता पायेंगे कि इसमें कुल 6 x 4 = 24 तीलियां है।

चित्र -3.

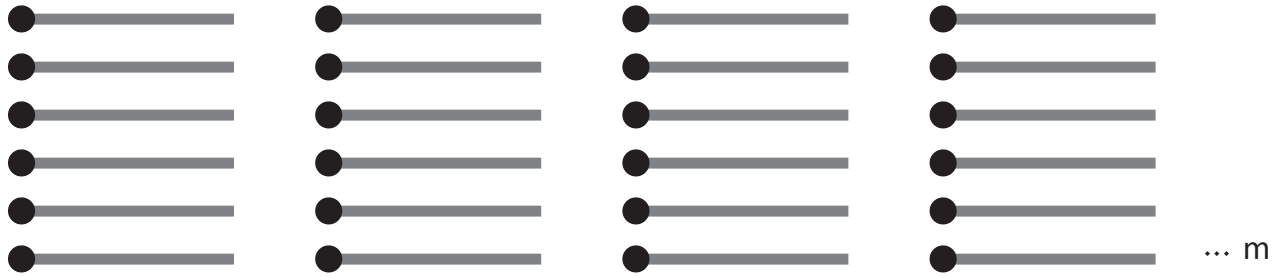


सुगमकर्ता प्रतिभागियों का तीसरा चित्र दिखाये। इसमें लम्बाई के समांतर तीलियों की संख्या को n तक बढ़ते हुये दिखाया गया है तथा चौड़ाई के समान्तर चार तीलियां का समूह है। चित्र दिखाने के बाद सुगमकर्ता प्रतिभागियों से पूछे कि इस आकृति में कुल कितनी तीलियां है?

यहां प्रतिभागी चर्चा कर पायेंगे कि इसमें एक तरफ (चौड़ाई के समान्तर) की तीलियां की संख्या तय है लेकिन दूसरी ओर(लम्बाई के समान्तर) की तीलियां कितनी है, पता नहीं हैं। ये तीलियां कितनी भी हो सकती है। अत: हम लम्बाई के समान्तर कुल तीलियों की संख्या n मान लेते हैं । इस तरह कुल तीलियों की संख्या 4 x n = 4n है।

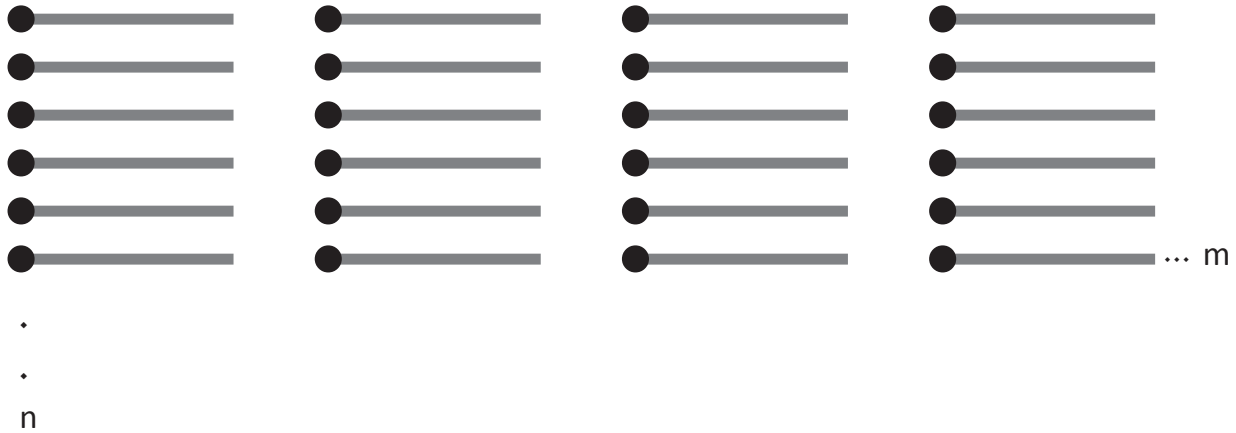
चित्र-4

यहां प्रतिभागी चर्चा कर पायेंगे कि इसमें एक तरफ (लम्बाई के समान्तर) की तीलियों की संख्या तय है लेकिन दूसरी ओर(चौड़ाई के समान्तर)की तीलियों m संख्या के बराबर बढ़ा दी गई हैं। इस आकृति में कुल तीलियों की संख्या m × 6 = 6 m होगी।



चित्र-5

अब इसमें दोनों ओर लम्बाई व चौड़ाई की ओर तीलियों की संख्या को m व n बार बढ़ा दिया गया है। इसमें कुल तीलियों की संख्या $m \times n = n \times m = m.n = mn$ है।



समेकन-

सुगमकर्ता चर्चा करें कि गुणा का मतलब बार-बार जोड़ना है। जैसे 4 को 5 बार जोड़ना या 5 को 4 बार जोड़ना है (यह केवल पूर्ण संख्याओं के समूह के लिये है) हमें कुल तीलियों की संख्या को जानना था। हमने 3 को 4 से या 4 को 3 से गुणा किया और हमें कुल तीलियों की संख्या का पता लग गया। गुणा का यह नियम जिस तरह अंकगणित में काम करता है ठीक वैसे ही यह नियम बीजगणित में भी काम करता है।

एक पदी का एक पदी से गुणन (सजातीय पदों में)

गुणांक व चिह्न के नियम का उपयोग करते हुये एक पदी का एक पद से गुणा करना।

उद्देश्य– प्रतिभागी सजातीय एक पदीय का एक पदीय से गुणन की संक्रिया स्पष्ट कर सकेंगे।

गतिविधि

सामग्री– बीजगणितीय फ्लैश कार्ड के 5 सैट, 2–2 सवाल लिखी पर्ची, बोर्ड, मार्कर या चॉक।

प्रक्रिया–

सुगमकर्ता प्रतिभागी के पांच उपसमूह बनाये और प्रत्येक उपसमूह को पर्ची में लिखे 2–2 सवाल हल करने के लिये दे। प्रश्न नीचे दिये गये हैं–

सवाल	समूह 1	समूह 2	समूह 3	समूह 4	समूह 5
1	$2\times4x$	$2\times(-4x)$	$(-5)\times3x$	$(-1)\times(-3x)$	$(-3x)\times4$
2	$(-4x)\times2x$	$(-3x)\times(-x)$	$6x\times2x$	$4x\times(-2x)$	$4x\times2x$

प्रत्येक समूह को एक–एक बीजगणितीय फ्लैश कार्ड का सैट दे दें। और प्रतिभागियों को कहे कि हल करने के बाद वे निम्नलिखित बिन्दुओं को ध्यान में रखकर अपना प्रस्तुतिकरण तैयार करें–

- आपने प्रश्नों का हल कैसे किया और आपको क्या समस्या आई ?
- प्रश्नों को हल करते हुये क्या आपने किन्हीं नियमों को खोजा है ? हां तो वे नियम कौन–कौनसे हैं और कैसे काम करते हैं ?

समेकन –

सभी समूहों के प्रस्तुतीकरण से निकले बिन्दुओं को सुगमकर्ता बोर्ड पर लिख ले और जो बातें प्रस्तुतीकरण में नहीं आई उन्हें जोड़ते हुये इस गतिविधि का समेकन निम्नलिखित बिन्दुओं के आधार पर करे।

जिस प्रकार से हम अंक गणित में चिह्नों व संख्या के मानक मान (Standard value) का गुणा करते हैं उन्हीं नियमों का ध्यान में रखते हुये बीजगणित में भी चिह्नों व संख्या के मानक मान का गुणा करते हैं।

बीजगणितीय फ्लैश कार्ड गुणा के दौरान क्षेत्रफल मॉडल को दर्शाती हैं। जैसे– 1 को 1 से गुणा किया जाये तो 1 इकाई, 1x को 1x से गुणा किया जाये तो x^2, तथा $1x$को 1 से गुणा किया जाये तो $1x$ आता है।

यहां हम धन चिह्न के लिये हरे रंग की तथा ऋण चिन्ह के लिये लाल रंग की फ्लैश कार्ड का उपयोग कर रहे हैं।

दो समान चिह्नों जैसे जोड़ का जोड़ से या ऋण का ऋण से को गुणा करने पर हमेशा जोड़ का चिह्न तथा असमान चिह्नों का गुणा करने पर ऋण का चिह्न ही आता है। इन सवालों में हमने इन नियमों का उपयोग किया है।

एकपद का एकपद से गुणन (विजातीय पदों में)

समय : 20 मिनट

गतिविधि-1

उद्देश्य- इस सत्र की समाप्ति के पश्चात प्रतिभागी -

प्रतिभागी विजातीय एक पदों की गुणा को स्पष्ट कर पायेंगे।

इसके एल्गोरिथ्म(तरीके) को स्पष्ट कर पायेंगे।

प्रक्रिया -

किसी आयताकार खेत की लम्बाई 2 इकाई और चौड़ाई 3 इकाई हो तो उसका क्षेत्रफल 6 वर्ग इकाई होगा। ऐसा ही एक आयताकार खेत है जिसकी लम्बाई x इकाई और चौड़ाई y इकाई हो तो उसका क्षेत्रफल क्या होगा? सुगमकर्ता बडे समूह में इस सवाल पर चर्चा प्रारंभ करे।

सुगमकर्ता प्रतिभागियों द्वारा दिये गये जवाबो को बोर्ड पर लिख ले। प्रतिभागियों द्वारा इसका हल इस प्रकार दिया जा सकता है- $x \times y$ या

सुगमकर्ता इस समस्या को थोडा जटिल बनाते हुये पुन: प्रतिभागियों से सवाल करे कि यदि इस आयताकार खेत की लंबाई 3 गुना तथा चौड़ाई 2 गुना कर दी जाय तो अब क्षेत्रफल कितना हो जायेगा ?

यहां प्रतिभागियों की तरफ से इस समस्या का निम्नलिखित हल निकलकर आ सकता है -

$$3x \times 2y = 6xy$$

समेकन :

यहां सुगमकर्ता बडे समूह में निम्नलिखित बिन्दु के आधार पर चर्चा को आगे बढ़ाये और समेकित भी करे -

विजातीय पदों का गुणा करते हुये पहले अंकों का अंकों से गुणा कर लेते हैं और प्राप्त परिणाम को लिख लेते हैं। इसके बाद जितने भी विजातीय पद हों उन्हें उसी रुप में एक साथ लिख लेते हैं। जैसे कि ऊपर दिये गये हल में पहले 3 को 2 से गुणा किया और उसके परिणाम यानि कि 6 को लिख दिया। फिर x और y को एक साथ लिख दिया गया है।

द्विपदी का एकपदीय से गुणन

समय : 20 मिनट

गतिविधि- 2

उद्देश्य :- एकपदीय व्यंजक से द्विपदीय व्यंजक के गुणन को स्पष्ट कर सकेंगे।

- योग में गुणन के वितरण नियम का उपयोग कर सकेंगे।
- पदों के गुणन को स्पष्ट कर सकेंगे।
- घात के नियम स्पष्ट कर सकेंगे।

- गुणनखण्ड की एल्गोरिथम (चरण) स्पष्ट कर सकेंगे।

सामग्री– बोर्ड, मार्कर या चॉक।

प्रक्रिया–

सुगमकर्ता बडे समूह से नीचे दिये गये सवाल को बोर्ड पर लिखकर यह चर्चा करे कि इस सवाल को किस–किस तरह से हल किया जा सकता है। इसके लिये वह बोर्ड पर प्रतिभागियों को सवाल हल करने के लिये आमंत्रित करे।

सवाल– $2x(2x-3)$

चर्चा के बिन्दुः–

- सुगमकर्ता प्रतिभागियों के द्वारा विभिन्न तरीकों से आये एक ही उत्तर आने के कारणों को जानने के लिए बड़े समूह मे चर्चा करे।
- योग में गुणन के वितरण का नियम की ओर ध्यान दिलाये।

सुगमकर्ता उपर्युक्त सवाल को निम्नलिखित प्रकार से पुनर्गठित कर योग मे गुणन के वितरण के नियम का उपयोग करते हुए प्रतिभागियों को बोर्ड पर हल करने के लिए आमंत्रित करे।

सवाल : A के पास किसी धन का दुगुना धन है B के पास A से 3 रू. कम है और C के पास A और B के धन के गुणनफल के बराबर धन है तो बताओ C के पास कितना धन है। C के धन की गणना बीजगणितीय फ्लैश कार्ड की सहायता से करना है।

(सुगमकर्ता गुणा की संक्रिया मे अंकगणित से बीजगणित की ओर जाने मे प्रतिभागियों की मदद करे और यह बताये कि बीगणितीय गुणा के एल्गोरिथ्म के चरणों को ध्यान दिलाये।)

सर्वप्रथम कथन का बीजगणितीय निरूपण करवाया गया जैसे $2 \times (2\times-3)$

योग पर गुणा के वितरण नियम का उपयोग करते हुए सर्वप्रथम 2x को 2x से और 2x को –3x से गुणा करने पर निम्नवत लिखा जा सकता है –

$(2x \times 2x) - (2x \times 3)$

$4x^2 - 6x$ (गुणा मे घात के नियम का उपयोग करते हुए)

समेकन बिन्दु–

अंकगणित के गुणा और बीजगणितीय गुणा मे फर्क को दिखाया जाये जैसे अंकगणित मे हम पहले चिह्नों का गुणा करते है और उसके बाद मे संख्याओं से गुणा करते हैं। लेकिन बीजगणितीय गुणा मे भी सर्वप्रथम तो अंकगणितीय गुणा की प्रक्रिया को ही अपनाते है लेकिन उसके बाद में चरों से गुणा करते समय घांताक के नियमो का एवं योग पर गुणा के वितरण और क्रमविनिमय नियम का उपयोग से गुणनफल को लिखा जाता है।

बीजगणितीय व्यंजकों में भाग की संक्रिया

समय : 40 मिनट

गतिविधि 1

उद्देश्य–

- बीजगणितीय व्यंजकों की भाग की संक्रिया को स्पष्ट कर सकेंगे।

सामग्री – बोर्ड एवं मार्कर

प्रक्रिया :

बड़े समूह के सामने एक सवाल $8a^2 \div 4a$ बोर्ड पर लिखा जाए एवं कहा जाए कि इस सवाल को हम कैसे हल करते हैं। यह शिक्षकों के लिए कोई मुश्किल कार्य नहीं है पर हमें इससे आगे यह बात करनी है कि हल करने के लिए क्या प्रक्रिया काम में ली गई है।

शायद शिक्षक इसका सीधा जवाब दे देंगे तब यहां उनसे बात की जाए कि यह जवाब कैसे आया?

जब शिक्षकों द्वारा सभी बाते आ जाए तो निम्नलिखित बिंदुओं के साथ सवाल को हल करते हुए समेकित करें।

यदि हम $8a^2 \div 4a$ को हल करते है तो इसे हम विस्तार से इस तरह देख सकते हैं।

$8a^2 \div 8 \times a \times a$ यहां हम $8a^2$ को विस्तार करके $8 \times a \times a$ लिख सकते हैं।

$4a = 4 \times a$ यहां हम $4a$ को $4 \times a$ लिख सकते है।

$\frac{8 \times a \times a}{4 \times a} = 2a$ यहां हम अंकगणित की तरह ही पहले 8 में 4 का भाग देंगे एवं फिर a^2 में a का भाग देंगे।

समेकन :

हम अंकगणित में भाग करना जानते है। यहां हम उसी समझ को उपयोग करते हुए बीजीय व्यंजको में भाग की संक्रिया करेंगे। यहा देखने वाली बात यह है कि अवधारणात्मक रूप से हमें कोई अलग प्रक्रिया करने की जरूरत नहीं होती है, पर यहां ध्यान रखने वाली बात तब होती है जब हमें बहुपदीय व्यंजकों के साथ काम करना पड़ता है तब वहां सजातीय पदों को ही हम एक साथ रख सकते हैं।

आकलन प्रश्न

सभी सवालों को समूह में विस्तार से एक एक करके हल करना।

$\frac{3ab\,(4a^2b^5)}{8a^2b^3}$, $\frac{12m^2n^2}{(6m^4n^5)^2}$, $\frac{6p^3q^2-10p^2q}{4q}$, $\frac{12a^2b}{3ab^2}$, $\frac{2x^2-6x}{3x}$

$\frac{6x^3+4x^3+2x}{2x}$ $\frac{6y^6-18y^3-12y^2}{-3y^2}$ $\frac{12x^3+6x^2+3x}{2x}$

$\frac{6x^3+9x^2+3x}{3x}$ $\frac{-y^4-6y^2-3y}{-3y^2}$

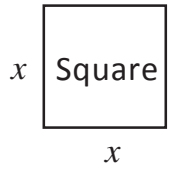
समेकन बिन्दु

- समान चिह्नों में भाग देने पर भागफल में धन चिह्न आता है, विपरीत चिह्न होने पर भागफल में ऋण चिह्न आता है।

बीजीय व्यंजकों के गुणा और भाग से सम्भावित अवधारणात्मक त्रुटियां–

उदाहरण –1

किन्हीं दो राशियों का गुणा परंपरागत तरीके से होता है, परन्तु नीचे दिए गये उदाहरण में बच्चे कुछ गलतियां ऐसी भी करते हैं।



A = xx या A = $2x$

A = ... ?

उदाहरण –2 – बीजीय व्यंजको में गुणन की संक्रिया में कुछ प्रश्नों में ऐसा भी देखा गया है कि

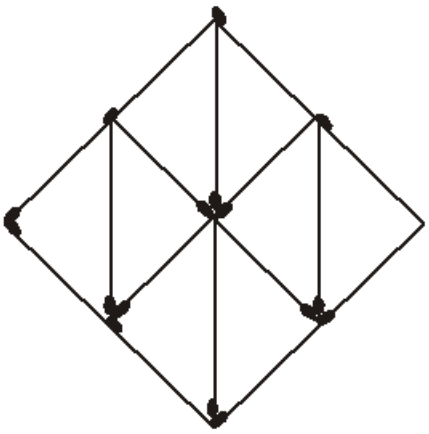
$$3(4x-5)=12x-5$$
$$5x(5x-2)=25x-10x$$
$$-4(5x+1)=20x+4$$

1. उपरोक्त उदाहरण में बच्चे क्या गलती कर रहे है।
2. बच्चे ऐसी गलतियाँ क्यों करते है।
3. इन गलतियों में सुधार के लिए आपके क्या सुझाव हैं?

(इस सत्र के बाद पठन सामग्री –5 **"गणित के अन्य क्षेत्रों में बीजगणित की भूमिका"** पढ़ने को देंगे।)

जरा सिर तो खुजलाइये–

नीचे दी गई आकृति में से 4 तीलियां इस प्रकार हटाइये कि चार त्रिभुज बच जॉय –



समय : 80 मिनट

समीकरण की अवधारणा

चर्चा प्रश्न

- दैनिक जीवन में कुछ साधारण दिखने वाली बातों पर चर्चा करके देखें–
- राम के पास 7 सेब थे, सोहन ने 5 सेब और दे दिये, अब राम के पास कितने सेब हैं?
- हरीश की ऊंचाई 160 सेमी. तथा रहमान की ऊंचाई 165 सेमी. है। दोनों की ऊंचाई के सम्बन्ध को बड़े और छोटे गणितीय संकेत (<, =, >) के रूप में व्यक्त कीजिए।

समेकन :

दैनिक जीवन में प्रचलित इस प्रकार के कई कथनों को गणितीय संकेत के रूप में प्रदर्शित करने पर

7+5=12 (कुल सेब हो गये)

165 >160 (रहमान ज्यादा ऊंचा है)

इसी प्रकार 9 < 10 (नौ छोटा है 10 से)

उपर्युक्त कथन सदैव सत्य कथन है।

अब एक नये कथन पर विचार करते है–

रेखा के पास 10 आम थे उसे राखी ने 'कुछ ' आम और दे दिये, जिससे उसके पास 25 आम हो गये, उपर्युक्त कथन में 'कुछ' शब्द पर ध्यान दें।

'कुछ' शब्द निश्चित नहीं है। अत: हम इसे बीजीय अक्षरों $a, b, c, d, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x, y, z$ आदि के निरूपित करते हैं।

इस प्रकार रेखा के पास $x + 10$ आम होंगे। कथनानुसार चूंकि रेखा के पास कुछ आमों की संख्या 25 है।

अत: इस कथन को निम्नवत लिखा जा सकता है।

$10 + x = 25$

यह एक समीकरण है।

परिभाषा :

अत: समीकरण एक ऐसी 'समिका' है जिसमें एक या एक से अधिक अज्ञात (चर) राशियाँ होती हैं।

समीकरणों में= (बराबर) चिह्न के दोनों तरफ कुछ पद होते हैं।

जैसे : $x-6=10$

इसमें दो पक्ष हैं, बराबर (=) के बायीं ओर बांया पक्ष (left hand side) तथा दांयी और दायां पक्ष (Right hand side) कहलाता है।

समीकरणों के कुछ उदाहरण

$x + 2 = 3$

$x - 6 = 10$

$2x + 3 = 5$

$5x + 6 = 8$

इसी प्रकार कुछ अन्य उदाहरण बनाएं व हल करें।

समय : 80 मिनट

एक चर वाले रैखिक समीकरण

उद्देश्य– प्रतिभागी समीकरण का अर्थ स्पष्ट कर सकेंगे।

एक चर वाले रैखिक समीकरण का निर्माण कर सकेंगे।

आवश्यक सामग्री –

ह्वाइट बोर्ड (white board), मार्कर्स (markers)

प्रक्रिया

सुगमकर्ता तुलना सम्बन्ध (order relations) (< = >) पर चर्चा करने से पहले , एक सवाल प्रतिभागियों से पूछेगा कि– दो राशियों (Quantities) या वस्तुओं के बीच सम्बन्ध / तुलना हम कैसे करते है?

सुगमकर्ता चर्चा में सहयोग करने के लिए कुछ उदाहरण देगा जैसे – डेविड राम से उम्र में ज्यादा है, मेरे पास मीरा से ज्यादा टॉफी है, संख्या 7, 2 से अधिक है।

सुगमकर्ता उपरोक्त उदाहरणों में बड़े ओर छोटे का चिह्न लगवायें।

समेकन –

- उपरोक्त चर्चा के आधार पर सुगमकर्ता छोटे बड़े और बराबर का चिह्न लगवा कर इस चर्चा को समेंटेंगे।

गतिविधि–1

उद्देश्य

- प्रतिभागी सुनिश्चित कर पायेंगे कि दिए गये गणितीय कथन सही है या गलत।
- प्रतिभागी बराबर चिह्न (=) को समीकरण के भाव से स्पष्ट कर पायेंगे ।

आवश्यक सामग्री–

ह्वाइटबोर्ड (white board), मार्कर्स (marker)

प्रक्रिया

सुगमकर्ता कुछ कथनों को बोर्ड पर लिखेगा? जैसे-

- $7 > 5$
- $2 + 5 = 9$
- $2 + 5 < 42$
- $2x + 4 = 7$
- $x > 5$

- सुगमकर्ता प्रतिभागीयों से कहेगा कि कौन-कौन से कथन सही है और कौन-कौन से गलत है, और ऐसे कौन-कौन है जिनके बारे में कुछ नहीं कहा जा सकता है।

(सत्य)	(असत्य)	(कहा नहीं जा सकता)

- सुगमकर्ता प्रतिभागियों से पूछे कि उन्होंने दिए हुए कथनों को उन निश्चित कालम में रखने का क्या तर्क है।
- चर्चा समाप्त होने पर सुगमकर्ता दी गए वर्कशीट के माध्यम से इस अवधारणा को पुनः जाचेंगे।

(वर्क शीट 1)

क्रम सं	गणितीय कथन (व्यंजक)	सही	गलत	कुछ नहीं कह सकते
1	$3 + 4 = 7$			
2	$2x = 8$			
3	$X + 1 > 8$			
4	$X + 4 = 10$			
5	$X + 1 \geq 8$			
6	$3a + 2$			
7	$X^2+1 > 0$			
8	$2 + 3 = 4 + 5$			
9	$3 + 4 > 1$			
10	$2 + x = 3 + x$			
11	$2X - 4 = 5$			
12	$8 = 10$			
13	$3 + 5 < 8$			
14	$X^2+1 < 0$			

चर्चा प्रश्न –

सुगमकर्ता प्रत्येक कथन (व्यंजक) पर एक एक करके सारणी मे दी गयी तीनो श्रेणियों पर चर्चा करवाए कि वह उस श्रेणी मे क्यों है।

समेकन

जब किसी भी कथन में कोई भी चर पद आ जाता है तो सही और गलत का अनुमान लगाना कठिन हो जाता है पर दूसरी ओर अगर कोई भी चर पद न हो तो सही और गलत का अनुमान लगाना आसान हो जाता है।

समय : 80 मिनट

बीजगणितीय समिका एवं सर्वसमिकायें –

उद्देश्य :

- समिका एवं सर्वसमिका में अन्तर स्पष्ट कर सकेंगे।
- सर्वसमिका की सहायता से जटिल गणितीय समस्याओं को हल कर सकेंगे।

गतिविधि:1

संदर्भ व्यक्ति प्रतिभागियों को निम्नलिखित प्रश्नों पर चर्चा विचार करने के लिए कहेंगे। प्रतिभागी अपने समूह में चर्चा के उपरान्त प्रस्तुतीकरण करेंगे।

चर्चा प्रश्न–

निम्नलिखित प्रश्न में कारण सहित बताएं कि आपने किसे समिका कहा और किसे सर्वसमिका कहा और क्यों ?

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $2a + 1 = 11$
3. $(a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2$
4. $(b-7)^2 = 0$
5. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
6. $a^2 - 3a + 2 = 0$
7. $2ax + 7b = 0$
8. $3ax + 2b + c$
9. $(y-z)^2 = y^2 - 2yz + z^2$
10. $(x+y+z)(x-y-z) = x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$

समेकन

ऐसे बीजीय कथन जो चर के कुछ विशिष्ट मानों के लिए सत्य होते है समिका कहलाते है।

ऐसी समिकाएं जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है सर्वसमिकाएं कहलाती है।

प्रत्येक सर्वसमिका एक समिका भी होती है जबकि प्रत्येक समिका सर्वसमिका हो ऐसा जरूरी नहीं होता है।

क्या $x^2+3x+2=132$, x के सभी मानों के लिए सत्य हैं या नहीं ? यह केवल $x=10$ के लिए ही सत्य है। इसलिए यह एक समिका है सर्वसमिका नहीं।

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$$
$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy$$
$$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$

मानक सर्वसमिकाएं है।

सर्वसमिकाओं के उपयोग

सन्दर्भ व्यक्ति प्रतिभागियों को समूहों में विभाजित कर निम्नलिखित पर चर्चा प्रश्नों में दिए गये व्यजंकों को सर्वसमिका के रूप में व्यक्त करने को कहें।

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$$
$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy$$
$$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$

चर्चा प्रश्नः

1. $x^2+8x+16$
2. $36-12x+x^2$
3. $x^2+3x+\frac{9}{4}$
4. $(40+1)(40-1)$
5. $(x+\frac{1}{x})^2$
6. $(200+x)^2$
7. $(198)^2$

8. $(a^2+b^2)^2$

9. $(4x-9)^2$

10. 51^2-49^2

11. $1.02^2-9.8^2$

12. यदि $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ हो तो $x^2+\frac{1}{x^2}$ तथा $x-\frac{1}{x}$ के मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि $x^2+\frac{115}{x}=\frac{15}{4}$ हो तो $x^2-\frac{1}{x^2}$ तथा $x+\frac{1}{x}$ के मान ज्ञात कीजिए।

आंकलन प्रश्न :

1. वर्गाकार खेत की भुजा की माप $(30+x)$ मीटर है, खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये?
2. एक खेत में $(x-20)$ क्यारियां है तथ प्रत्येक क्यारी में $(x-20)$ पपीते के पौधे लगे है, तो बताएं खेत में कुल कितने पपीते के पौधे हैं?
3. एक आयताकार मैदान की लम्बाई $(2x+1)$ मीटर तथा ऊँचाई $(2x-1)$ मीटर है तो मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?
4. एक पुस्तक का मूल्य $(3x+1)$ रूपये है, ऐसी $(3x-1)$ पुस्तकों का मूल्य ज्ञात कीजिये?

एक चर वाले रैखिक समीकरण का दैनिक जीवन में उपयोग

उद्देश्य –

प्रतिभागी दैनिक जीवन से जुड़ी हुई एक चर वाली गणितीय समीकरण बना पायेंगे।

गतिविधि–2

आवश्यक सामग्री

चॉक बोर्ड, A 4 साइज पेपर, पेन, पेंसिल।

प्रक्रिया –

सुगमकर्ता प्रतिभागियों को चार छोटे समूहों में बांटकर उन्हें A 4 साइज पेपर और पेंसिल देगा।

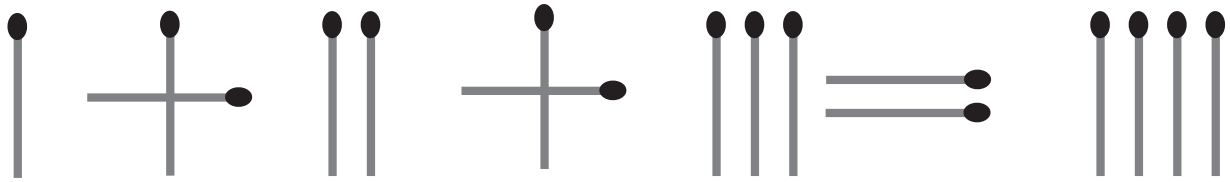
सुगमकर्ता बोर्ड पर चार विषय लिखेगा और छोटे समूहों को उनसे सम्बंधित 5–5 प्रश्न बनाने को कहेगा जो प्रश्न अभी तक चर्चा में न आये हो व जिसमें एक चर सम्मिलित हों।

Group1 उम्र (Age)
Group2 मुद्रा (Money)
Group3 मापन (Length/Perimeter)
Group4 चाल समय (Speed – time)

- प्रत्येक समूह की शीट लेकर आपस मे अदला बदली (exchange) करेंगे जैसे– (G1<->G2, G3 <-> G4)

एक समूह दूसरे समूह से प्राप्त प्रश्नों का अपने समूह में चर्चा करेगा व सुगमकर्ता बड़े समूहों में प्रस्तुतीकरण करायेगा।

जरा सिर तो खुजलाइये–



किसी एक तीली को हटाकर समीकरण संतुलित करिये।

क्षेत्रमिति

- मानक इकाईयां
- परिमाप
- क्षेत्रफल

क्षेत्रमिति

गणितीय अध्ययन–अध्यापन में, प्रक्रियाओं एवं संक्रियाओं के साथ साथ विषयवस्तु को बच्चे के अनुभवों द्वारा अवधारणाओं को पुष्ट करने वाला होना चाहिए। सुस्पष्ट अध्ययन सामग्री एवं सम्बन्धित क्रियाकलाप बच्चे की अवधारणों के विकास करने, गणित सीखने, गूढ़ तथ्यों व तर्क वितर्कों को समझने के साथ ही सूत्र रूप में उन्हें वर्णित करने में सहायक होती हैं। क्षेत्रमिति अधिक अच्छे प्रतिरूप एवं मानचित्र बनाने में क्षेत्रफल आयतन,आकारों एवं मापों में समानता देखने और समझने में मदद करती है। आकारों की जानकारी, उनकी बनावट की अंर्तदृष्टि न केवल बच्चों को मापन का संदर्भ समझाने में उनकी सहायता करती है बल्कि ज्यामिति को समझने व स्थानिक ज्ञान विकसित करने में भी उनकी सहायता करती है जो कि दैनिक जीवन के लिए महत्वपूर्ण है।

मानक इकाइयाँ

समय : 80 मिनट

उद्देश्य: **प्रतिभागी इस सत्र के पश्चात**

- मानक इकाइयों की आवश्यकता स्पष्ट कर सकेंगे।
- इकाइयों को आपस में बदल सकेंगे।

गतिविधि-

सहायक सामग्री: कागज की A4 शीट्स

प्रक्रिया-

1. सुगमकर्ता पांच समूहों का निर्माण करेंगे।
2. प्रत्येक समूह सुविधानुसार मापन हेतु अमानक इकाई (Unit) का उपयोग करेंगे।
3. इस इकाई से प्रत्येक समूह A 4 शीट के किनारों को नापेंगे।
4. प्रत्येक समूह शीट नाप कर उत्तर एवं इकाई बताएगें।
   (प्रत्येक समूह के उत्तरों पर चर्चा)

चर्चा प्रश्न

अ) प्रत्येक समूह का उत्तर अलग-अलग क्यों आया?

ब) भिन्न-भिन्न इकाईयों के प्रयोग से क्या-क्या समस्याएं हो सकती है?

स) इन समस्याओं को कैसे दूर किया जा सकता है?

समेकन

बच्चों के लिए मापन के प्रारम्भिक कार्य की दृष्टि से गैर मानक इकाइयाँ अधिक उपयुक्त होती है। यदि सभी बच्चे वस्तुओं की लम्बाई कदम / बालिस्त से मापें तो सम्भवत: उन्हें इस निष्कर्ष पर पहुंचने में मदद मिलेगी कि एक ही वस्तु को अलग-अलग व्यक्ति मापें तो ये इकाइयां अलग-अलग लम्बाई बताती है इसे देखते हुए मापन की मानक इकाइयों का उपयोग आवश्यक हो जाता है।

अमानक इकाई द्वारा मानक इकाई की अवधारणा तक पहुंचने के लिए कक्षा कक्ष में बच्चों को आप-पास की वस्तुओं की लम्बाई जैसे-ब्लैकबोर्ड मापना , कमरे की लम्बाई मापना, बच्चों की लम्बाई मापना, मेज की लम्बाई आदि अभ्यास दे सकते है। (मापने के लिए हम बालिस्त, मुठ्ठी, हाथ, अंगुल,पैर, कदम आदि की उपयोग कर सकते हैं।)

केस स्टडी

शिक्षक ने कक्षा छः के बच्चों को पटरी द्वारा मापन करना सिखाया। पाठ पढ़ने के बाद शिक्षक ने बच्चों की समझ जांचने के लिए पांच सेमी. का एक रेखाखण्ड बनाने को कहा।

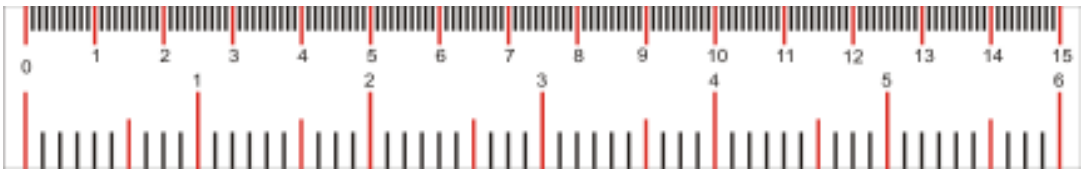
1. डेविड ने 5 सेमी. का रेखाखण्ड खींचने के लिए शून्य से पहले (जहां से पटरी की शुरूआत होती है) से 5 सेमी. का रेखाखण्ड बनाया।

शिक्षक – डेविड आपने 5 सेमी. लम्बाई का रेखाखण्ड कैसे बनाया?

डेविड – मैंने पटरी जहां से शुरू होती है वहां से 5 तक गिनकर रेखाखण्ड बनाया।

शिक्षक – आप ने पटरी की शुरूआत से रेखाखण्ड क्यों खींचा?

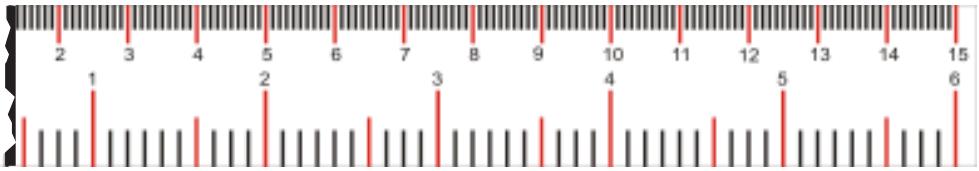
डेविड – कोई उत्तर नहीं।



2. **रमेश ने 5 सेमी. लम्बाई का रेखाखण्ड, टूटे हुए पटरी के टुकड़े के 2 सेमी. के चिह्न से खींचा**

शिक्षक – रमेश आपने यह रेखाखण्ड कैसे बनाया?

रमेश – सर, मेरा स्केल टूटा था मैंने बिन्दु 2 सेमी. से 5 तक रेखाखण्ड खींचा।



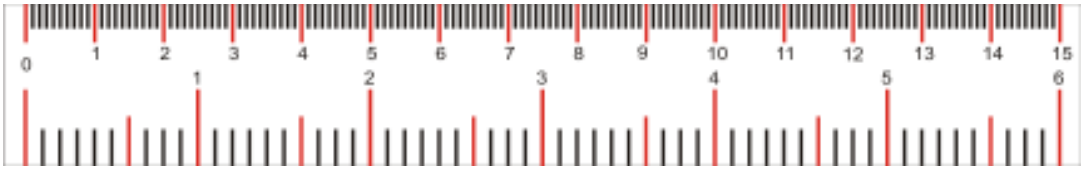
3. शबनम ने 5 सेमी. लम्बाई का रेखाखण्ड पटरी के बिन्दु 1 सेमी. से लेकर 5 सेमी. तक खींचा।

शिक्षक – मारिया आपने यह रेखाखण्ड कैसे खींचा?

शबनम – सर, मैंने बिन्दु 1 से 5 तक गिनकर रेखाखण्ड खींचा।

शिक्षक – शबनम, आपने बिन्दु 1 से रेखाखण्ड क्यों खीचा?

शबनम – सर, गिनती की शुरूआत एक (1) से होती है।



चर्चा प्रश्न–

1. बच्चे ऐसी गलती क्यों करते हैं?
2. आप बच्चों को किस प्रकार से उपरोक्त स्थितियों में मदद कर सकते हैं?

समेकन :

उपरोक्त स्थितियों में बच्चों द्वारा गलतियाँ करने के सम्भावित कारण निम्नवत हो सकते है–

1. बच्चों को पटरी द्वारा मापन की अवधारणा की सही समझ न होना।
2. समझाये गये तरीकों को बच्चे द्वारा विभिन्न रूपों में समझना।
3. पर्याप्त अभ्यास की कमी का होना।

समय : 80 मिनट

परिमाप

उद्देश्य–

इस सत्र के पश्चात प्रतिभागी –

- परिमाप के अर्थ को स्पष्ट कर सकेंगे।
- परिमाप का दैनिक जीवन उपयोग कर सकेंगे।

गतिविधि–1

आवश्यक सामग्री – स्केल/ फीता (लम्बाई नापने हेतु), आस–पास की वस्तुऐं।

प्रक्रिया :

- प्रतिभागियों के 4 –5 समूह बनायें।
- प्रतिभागियों से कहा जाय कि कुछ वस्तुएं जैसे– दरवाजा, खिड़की श्यामपट्ट, मेज, फर्श तथा पहिये का अनुमानित परिमाप ज्ञात करें।

चर्चा प्रश्न–

- आपने वस्तु के परिमाप का अनुमान कैसे लगाया?
- इस क्रिया में आपने कौन सी इकाई का उपयोग किया?
- आपने अन्य किसी और इकाई का उपयोग क्यों नहीं किया?
- आप अपने दैनिक जीवन में अनुमान का उपयोग कैसे और कहां –कहां करते हैं?
- कौन–कौन सी परेशानियां आती है। जब हम अनुमानित विधि का प्रयोग करते है?

समेकन :

सन्दर्भदाता प्रतिभागियों से इसे दैनिक जीवन से जोड़ने का प्रयास करायें और उन इकाईयों पर भी चर्चा करते हुए समेकित करें।

गतिविधि–2

उद्देश्य– विभिन्न बन्द ज्यामितीय आकृतियों का परिमाप ज्ञात करना।

सामग्री– वर्कशीट

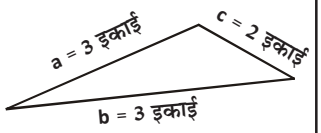
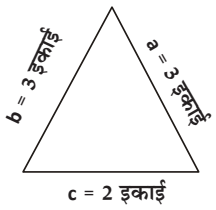
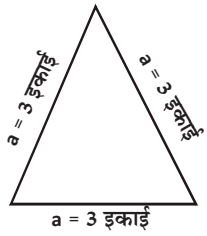
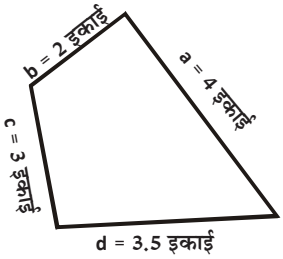
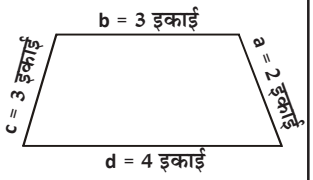
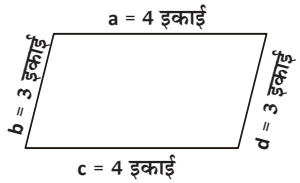
प्रक्रिया –

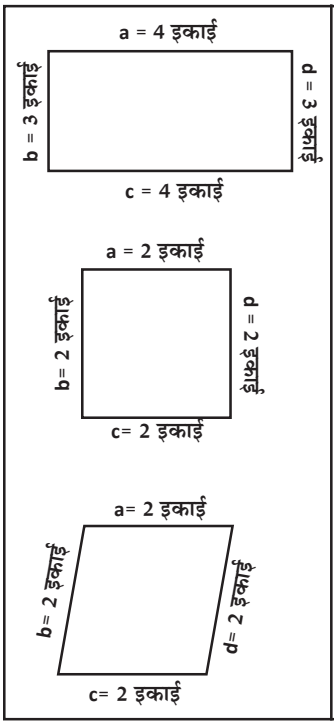
- प्रतिभागियों को 4–5 समूह में विभक्त कर बहुभुजों से सम्बन्धित वर्कशीट देंगे।
- वर्कशीट पर कार्य करने के उपरान्त आपस में चर्चा करेंगे।
- सभी समूह अपने–अपने अवलोकन को बड़े समूह के साथ साझा करेंगे।

वर्कशीट

•विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के परिमाप का निगमन की सीट पृथक से समूह में दी जायेगी।

विभिन्न बंद ज्यामितीय आकृतियों के परिमाप – वर्कशीट

आकृतियां	भुजाओं की सख्या	बहुभुज के प्रकार	a	b	c	d	परिमाप	सरलीकृत सूत्र के रूप में
								
								
								
								
								
								

चर्चा बिन्दु –

सन्दर्भदाता पूरे समूह के साथ निम्न बिन्दुओं पर चर्चा करेंगे।

- हमने आकृतियों के परिमाप के सूत्र कैसे बनाये।
- किसी n भुजाओं वाले बहुभुज का परिमाप क्या होगा?

समेकन :

- चर्चा के बाद सन्दर्भदाता निम्नलिखित बिन्दुओं पर चर्चा को समेकित करेंगे।
- परिमाप किसी बहुभुज के सभी भुजाओं का योग होता है।
- किसी बहुभुज का परिमाप ($n \times a$) होगा जहां पर n भुजाओं की संख्या और a भुजा की माप है।

जैसे–

- विषमबाहु त्रिभुज का परिमाप = a + b + c होगा

  a, b, c त्रिभुज की भुजाएं हैं।

- समद्विबाहु त्रिभुज के लिए (2a+b)

  (जहां a समान भुजाओं की लम्बाई है तथा b तीसरी भुजा है)

इसी प्रकार

आयत का परिमाप = 2 (a + b)

वर्ग का परिमाप = 4a

समचर्तुभुज का परिमाप = 4a

परिमाप एक बन्द आकृति की सीमाओं की माप है ।दूसरे शब्दों में परिमाप एक ऐसी दूरी है जो रेखाखण्ड़ों के साथ-साथ (अर्थात् परिसीमा के अनुदिश) चलते हुए एक बन्द आकृति बनाती है, जब हम उस आकृति के चारों ओर एक चक्कर पूरा करते हैं।

कुछ गतिविधियां सुगमकर्ता द्वारा दी जा सकती है-

- चार्ट पेपर में आकृतियां बनाकर धागे से मापना।
- तीलियों की सहायता से परिमाप को समझना।
- खेत के चारों ओर बाड़ लगाना
- खेल के मैदान में ट्रैक पथ निर्माण।
- फोटो फ्रेम करना।
- फर्श / कमरे के चारों ओर की सजावट करना।

इसी प्रकार विभिन्न गतिविधियों की सहायता से कक्षा कक्ष में परिमाप की अवधारणा स्पष्ट की जा सकती है।

समय : 40 मिनट

परिधि और परिमाप

परिधि और परिमाप दोनों ही किसी द्विविमीय (Two dimension) बंद आकृति की परिसीमा की कुल माप को दर्शाते है। परिधि शब्द का उपयोग वृत्त, अंडाकर, दीर्घवृत्त, वृत्त-चाप के सन्दर्भ में होता है।

वृत्त की परिधि

उद्देश्य :

- इस गतिविधि को करने के पश्चात प्रतिभागी पाई (π) अवधारणा स्पष्ट कर सकेंगे।
- वृत्त की परिधि का सूत्र ज्ञात कर सकेंगे।

गतिविधि

आवश्यक सामग्री

1. फीता, स्केल
2. वृत्तीय आकार की वस्तुएं

सुगमकर्ता बड़े समूह को 5 छोटे उप समूहों में बांटकर, निम्नलिखित तालिका भरने को कहेगा

तालिका

मापी जाने वाली वस्तुएं	परिधि	व्यास	परिधि/ व्यास
चूडी (Bangle)			
सी.डी. (C. D.)			
किसी लम्बवृत्तीय बेलनाकार वस्तु का आधार			
गिलास का ऊपरी सिरा			

चर्चा बिंदु –

तालिका से प्राप्त आंकड़ों के आधार पर सुगमकर्ता प्रतिभागियों से निम्न प्रश्नों को पूछेगा।

- उपर्युक्त वृत्तीय वस्तुओं की परिधि और व्यास के बीच क्या कोई सम्बन्ध है?
- परिधि और व्यास के अनुपात का क्या मान है?
- उपर्युक्त प्रेक्षणों से आपने क्या निष्कर्ष निकाला?
- क्या इसे एक सूत्र के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है?

समेकन–

सुगमकर्ता निम्न बिन्दुओं से चर्चा का समेकन करेगा।

आपने देखा कि प्रत्येक स्थिति में परिधि और व्यास का अनुपात सदैव नियत रहता है, जिसको पाई (π) से व्यक्त करते है।

पाई (π) = परिधि/ व्यास = 22/7

परिधि = $\pi \times 2r$

परिधि (c) = $2\pi r$

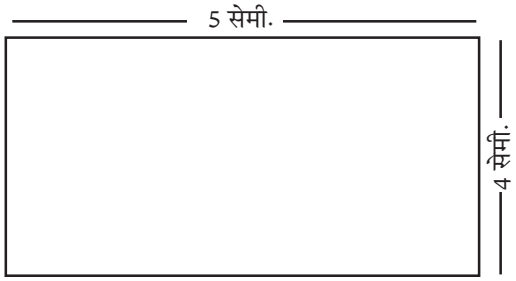
वृत्त की परिधि =$2\pi r$ इकाई, जहां r वृत्त की त्रिज्या है।

समय : 40 मिनट

परिमाप से सम्बन्धित अवधारणात्मक त्रुटियाँ

परिमाप से सम्बन्धित सवालों को हल करते समय, विद्याथियों में कुछ अवधारणात्मक त्रुटियाँ देखी गयी है?

1. **उदाहरण–1**

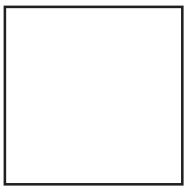


अध्यापक –दिए गए आयत का परिमाप क्या होगा

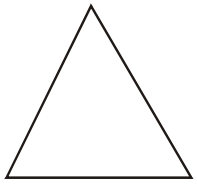
कुछ विद्यार्थी इस का उत्तर = 20 सेमी^{2} देते है।

उदाहरण – 2

विद्यार्थियों को दी गयी आकृतियों का परिमाप ज्ञात करने को कहेंगे।

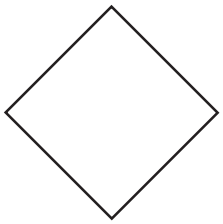


आकृति A



आकृति B

आकृति C

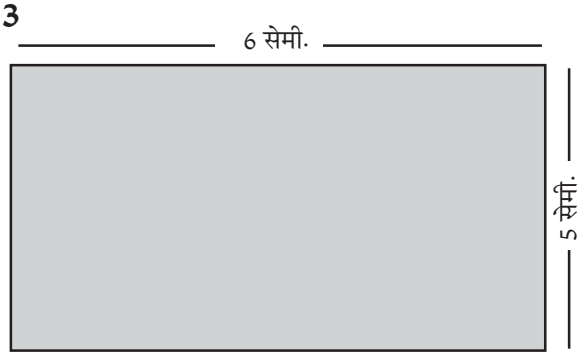


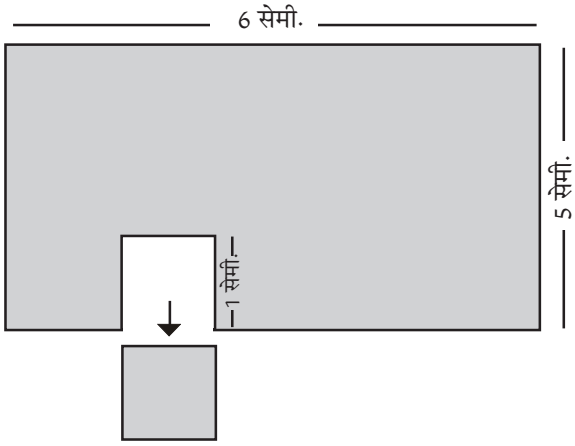
आकृति D

अध्यापक– दी गयी आकृतियों का परिमाप ज्ञात करो।

कुछ विद्यार्थियों की प्रतिक्रियाएं – आकृति C का परिमाप नहीं ज्ञात कर सकते क्योंकि इस आकृति का कोई सूत्र नहीं होता है।

उदाहरण –3





अध्यापक – यदि वर्गाकार टुकड़ा आयताकार आकृति से काट दिया जाए, तो शेष आकृति का परिमाप क्या होगा।

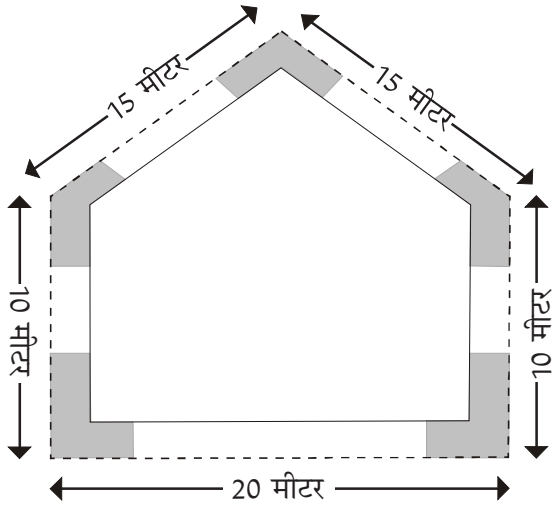
विद्यार्थी – वर्गाकार टुकड़ा काटने से आकृतिका परिमाप भी कम हो जाएगा, क्योंकि क्षेत्रफल कम होने से परिमाप भी कम हो जाता है।

आकलन प्रश्न :

1. एक बण्डल में 1200 मीटर कटीला तार है। इस तार से खेत के तीन फेरे लगने हैं। यदि खेत की चौड़ाई लम्बाई की दो तिहाई है तो खेत की लम्बाई तथा चौड़ाई क्या होगी ?
2. 42 सेमी. व्यास का एक पहिया 3 किलोमीटर 300 मीटर दूरी तय करने के लिये कितने चक्कर लगाएगा ?
3. एक आयत की प्रत्येक भुजा 2 गुनी कर दी जाती है। तो उसके परिमाप पर क्या असर पड़ेगा ?
4. एक बगीचे की लम्बाई 30 मीटर तथा चौड़ाई 20 मीटर है। बगीचे के चारों और कटीले तारों के फेरे लगवाने में कुल कितना लम्बा तार चाहिये ?

केस स्टडी

अम्बादत्त जी ने एक प्लाट लिया और उसकी सीमाओं पर (L) आकार के संकेतक चित्रानुसार डलवायें जो प्लाट की सीमा के अन्दर थे हर संकेतक 0.5 मीटर मोटाई का था कुछ महिने बाद उन्हें लगा उसकी चहारदीवारी करवाई जानी चाहिए। उन्होंने ठेकेदार मेहताब से संकेतकों के बाहरी किनारों को लेते हुए 4 फीट ऊंची चहारदीवारी बनाने के लिए कहा। हर मीटर के लिए 300 रुपये की दर से 21000 रुपये दे दिये गये।



चहारदीवारी बनने के बाद अम्बादत्त जी ने देखा ठेकेदार ने संकेतकों के अन्दर से बाउड्री बना दी।

प्रश्न 1. बताइये ठेकेदार ने अपना कितना पैसा बचाया ?

प्रश्न 2. इस गणना में गणित की किस अवधारणा का प्रयोग हुआ है।

समय : 80 मिनट

क्षेत्रफल

उद्देश्य- प्रतिभागी क्षेत्रफल की अवधारणा गतिविधियों की सहायता से स्पष्ट कर सकेंगे।

गतिविधि-1

प्रक्रिया

संदर्भ दाता प्रतिभागियों के समक्ष निम्नलिखित स्थितियां रखेंगे-

- दीवार में टंगा कलेण्डर कितनी दीवार आच्छादित करता है?
- इस कमरे को पूर्णत: आच्छादित करने के लिए कितनी कारपेट/ दरी चाहिए?
- इस खिड़की के लिए कितना परदा चाहिए?
- इस टेबल को ढ़कने के लिए कितने बड़े मेजपोश की आवश्यकता होगी?

सुगमकर्ता उपरोक्त कथनों से निम्नलिखित प्रश्नों पर चर्चा करवाकर 'क्षेत्रफल' की अवधारणा स्पष्ट करेंगे।

चर्चा प्रश्न-

उपरोक्त स्थिति में कौन सी बात सर्वनिष्ठ (Common) है?

सुगमकर्ता प्रतिक्रियाओं को संकलित करेंगे तथा प्रतिक्रियाओं को सारबद्ध/ संकलित कर क्षेत्रफल के अर्थ की व्याख्या करेंगे।

- सुगमकर्ता समूहवार निम्नलिखित प्रश्नों पर चर्चा करायेंगे।
- आप क्षेत्रफल की अवधारणा विकसित करने के लिए कक्षा-कक्ष में कौन सी गतिविधि प्रयुक्त करते हैं।

  (समूहवार गतिविधियों का प्रस्तुतीकरण।)

गतिविधि-2

आवश्यक सामग्री- पेड़ की पत्तियाँ, अनियमित आकृतियां, ज्यामितीय आकृतियां, ग्राफ पेपर, वर्ग, त्रिभुज, वृत्त के आकार की वस्तुयें, पेन्सिल, फेविस्टिक (fevistick)

प्रक्रिया: सुगमकर्ता समूहवार प्रतिभागियों से किसी अनियमित आकृति जैसे-पत्ती इत्यादि का ग्राफ की मदद से अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात करांएगे।

ग्राफ का उपयोग करके हम अनियमित आकृति की वस्तुओं को आच्छादित करेंगे तथा पूरी और आंशिक रूप से आच्छादित वर्गाकार खानों की संख्याओं का योग कर क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

चर्चा प्रश्न–

1. क्षेत्रफल ज्ञात करने में क्या–क्या दिक्कतें आयी ?
2. अनियमित आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञान करने के लिए किन इकाईयों का प्रयोग किया ?
3. किस इकाई द्वारा क्षेत्रफल का अधिक शुद्ध मान प्राप्त हुआ और क्यों ?
4. वह अन्य कौन–सी विधियां है जिनसे अनियमित तथा ज्यामितीय आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात किया जाता सकता हैं।

समेकन :

क्षेत्रफल आच्छादित क्षेत्र की माप को कहते है। हम अनियमित एवं ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल को पारदर्शी ग्राफ पेपर की मदद से भी ज्ञात कर सकते हैं। हम पूर्णत: आच्छादित करने वाले ग्राफ पेपर में खानों की सख्ंया तथा अपूर्ण रूप से आच्छादित खानों की संख्या को जोड़कर आकृति का अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। इस स्थिति में ग्राफ पेपर की मदद से प्राप्त क्षेत्रफल शुद्ध होता है।

गतिविधि–3

डॉट पेपर की सहायता से ज्यामितीय आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री– डॉट पेपर, पेंन्सिल, स्केल

प्रक्रिया–

1. चित्रानुसार डॉट पेपर का निर्माण करेंगे।
2. प्रतिभागियों से वर्ग इकाई पर चर्चा करेंगे।
3. प्रतिभागी 6 या 7 बहुभज आकृति अपने डॉट पेपर पर बनायेंगे।
4. प्रतिभागी प्रत्येक बहुभुज का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में बताएंगे।
5. प्रतिभागी दिए गये बहुभुजों के अनुसार निम्न सारणी की पूर्ति करेंगे।

क्र. सं.	अंत: बिन्दु (IP)	भुजाओं पर स्थिति बिन्दु (BP)	क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) A
1.			
2.			

प्रतिभागी अंत: बिन्दु व भुजाओं पर बिन्दु से प्रत्येक बहुभुज के क्षेत्रफल में सम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं एवं सारणी द्वारा यह सामान्यीकृत कर सकते हैं कि –

क्षेत्रफल (A) = अंत: बिन्दु (IP) + $\dfrac{\{\qquad (BP)\}}{2} - 1$

या $A = IP + \left(\dfrac{BP}{2}\right) - 1$

इसे 'पिक्स प्रमेय' (Pick's theorem) कहते हैं। अंत: बिन्दु (IP- Interior Point) , भुजाओं पर स्थिति बिन्दु (BP- Boundary Point) ।

समय : 80 मिनट

वृत्त का क्षेत्रफल (वैकल्पिक विधि)

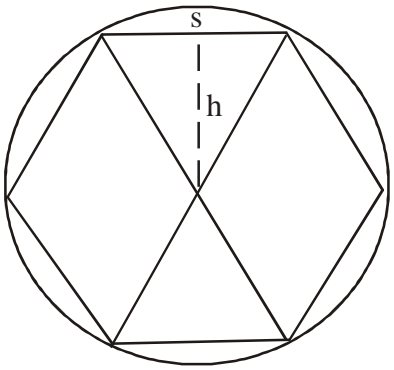
वैकल्पिक विधि –1

उद्देश्य: प्रतिभागी वृत्त के क्षेत्रफल के सूत्र के निगमन को वैकल्पिक विधि द्वारा स्पष्ट कर सकेंगे।

आवश्यक सामग्री:

चार्ट पेपर, स्केच पेन, परकार

पूर्व ज्ञान :



त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ ×आधार × ऊँचाई

किसी वृत्त का क्षेत्रफल निकालने के लिए हम 6 भुजा वाले नियमित (आकृति) से प्रारम्भ करते हैं।

अब इस नियमित बहुभुज को n समद्विबाहु त्रिभुज में विभाजित कर लेगें, जहां

s = बहुभुज की भुजाएं

r = वृत्त की त्रिज्या

h = केन्द्र के भुजा पर डाला गया लम्ब

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ ×आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times S \times h = \frac{1}{2}\ Sh$

यदि n त्रिभुज है $= n \times \left(\frac{1}{2}Sh\right) = h \times \frac{1}{2}(n \times s)$

$= \frac{h}{2}$ (ns) .....(i)

ns किसी भी बहुभुज का परिमाप है (जहां s = भुजा की लम्बाई, n = भुजाओं की संख्या है)

ऐसी दशा में बहुभुज वृत्ताकार ही दिखाई पड़ता है और ns जो कि बहुभुज का परिमाप है वह वृत्त के परिधि के बराबर हो जाता है जो कि $2\pi r$ है अर्थात $ns = 2\pi r$

ns का मान समीकरण (i) में रखने पर बहुभुज का क्षेत्रफल= $\frac{h}{2}(2\pi r)$

जैसे– बहुभुज की भुजाएं बढ़ती जाती है। त्रिभुज छोटा और छोटा होता जाता है और त्रिभुज की भुजा (s) न्यूनतम होती जायेगी तो एक स्थिति में h = r हो जायेगा।

अत: क्षेत्रफल $= h\pi r$ ..... (ii)

h = r समीकरण (ii) में रखने पर

$= r\pi r$

क्षेत्रफल (A) $= \pi r^2$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वैकल्पिक विधि –2

उद्देश्य: प्रतिभागी वृत्त के क्षेत्रफल के सूत्र के निगमन को वैकल्पिक विधि द्वारा स्पष्ट कर सकेंगे।

पूर्व ज्ञान:

1. वृत्त की परिधि = $c = 2\pi r$

2. त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \Delta = \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई $= \frac{1}{2} \times b \times h$

आवश्यक सामग्री:

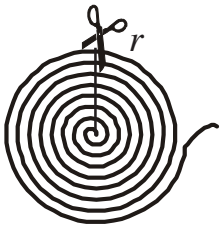
रंगीन तागे, चार्ट पेपर, स्केच पेन, परकार, कैंची।

प्रक्रिया :

r तिज्या का एक वृत्त बनाया।

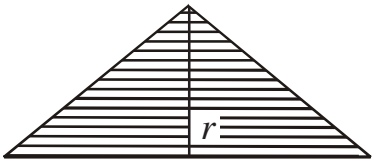
अब इस वृत्त के केन्द्र से एक तागा इस प्रकार लपेटते गये कि चित्र में दर्शाये गये तरीके से संकेन्द्रीय वृत्त बनें

(Concentric Circles) जिनके बीच कोई रिक्त स्थान न बचे। अन्तिम फेरा खीचें गये वृत्त की परिधि को पूर्णत: ढक लें। इस प्रकार बना सबसे छोटा वृत्त एक बिन्दु की भांति कार्य करेगा।



अब वाह्य परिधि के किसी बिन्दु से केन्द्र बिन्दु तक कैंची से चित्रानुसार काटेंगे।

इन धागों को चित्र में दर्शाये गये तरीके से इस प्रकार खोलें कि छोटे भाग से बड़े भाग तक वे एक त्रिभुज के आकार में व्यवस्थित हो जाये।



अवलोकन

इस प्रकार बने त्रिभुज की ऊंचाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर आती है जबकि त्रिभुज के आधार की लम्बाई वृत्त की परिधि के बराबर आती है। अत:

त्रिभुज की ऊँचाई = r

त्रिभुज का आधार $2\pi r$

अत: वृत्त का क्षेत्रफल = त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$

$= \pi r^2$

परिणाम – **वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2**

परिमाप एवं क्षेत्रफल से सम्बन्धित अवधारणात्मक त्रुटियाँ

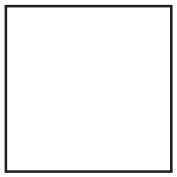
उद्देश्य –प्रतिभागी परिमाप एवं क्षेत्रफल से सम्बन्धित होने वाली अवधारणात्मक त्रुटियों को स्पष्ट कर पायेंगे।

प्रक्रिया

सुगमकर्ता प्रतिभागियों को छोटे–छोटे समूहों में बांटकर समूहकार्य करवायेंगे।

सवाल–1

एक छात्रा उत्साह से भरी हुई आपके पास आती है और वह बताती है कि मैंने एक नया सिद्धान्त खोज निकाला है, जिसे आपने कक्षा में कभी नहीं बताया है। वह बताती है कि किसी आकृति का परिमाप बढ़ाने पर उसका क्षेत्रफल भी बढ़ जाता है इसके लिए वह आपको नीचे दिए गये दो उदाहरण भी देती है–



परिमाप = 16 सेमी.

क्षेत्रफल = 16 वर्ग सेमी

परिमाप = 24 सेमी.

क्षेत्रफल = 32 वर्ग सेमी

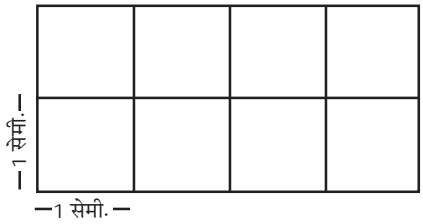
आप उस बच्ची को क्या जवाब देंगे और क्यों?

सवाल –2

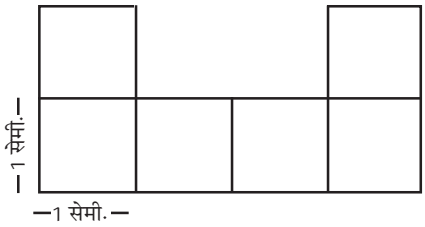
इमरान के पास 60 मीटर लम्बा तार है। जिसे वह अपने घर के बाहर वाले गार्डन केचारों ओर लगाना चाहता है। वह चाहता है कि गार्डन आयताकार आकृति में हो और उसका क्षेत्रफल अधिकतम हो। क्या आप इमरान की मदद कर सकते हो?

- उस आयताकार गार्डन की लम्बाई चौड़ाई क्या होगी? उन सभी सम्भावनाओं के चित्र भी बनाइये।

सवाल–3



आकृति A



आकृति B

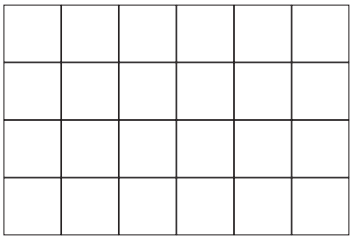
आकृति A का क्षेत्रफल ..... आकृति B का क्षेत्रफल .....

आकृति A का परिमाप ..... आकृति B का परिमाप .....

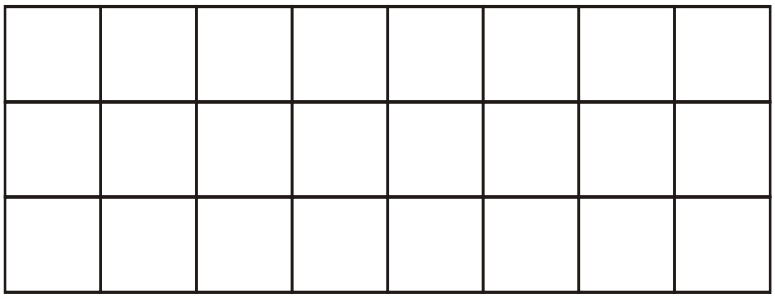
आप अपने निष्कर्ष तक कैसे पहुंचे। परिमाप निकालने की प्रक्रिया क्या रही ? आपने जो प्रक्रिया अपनाई है उसे एक उदाहरण की सहायता से समझाइए।

सवाल–4

नीचे दो आयताकार आकृतियां दी गई है जिनका क्षेत्रफल24 वर्ग इकाई है।



आकृति A



आकृति B

- क्या आप अन्य कोई आयताकार आकृति बना सकते हो जिसका क्षेत्रफल 24 वर्ग इकाई ही हो ?
- क्या एक से ज्यादा आयताकार आकृतियां बनाई जा सकती जिनका क्षेत्रफल 24 वर्ग इकाई ही हो उसे ग्राफ पेपर पर बनाइये।
- आपके द्वारा बनाई गई आकृतियों से क्या कोई निष्कर्ष निकल रहा है अपने शब्दों में उल्लेख कीजिए।

सवाल –5

16 एवं 36 वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले सम्भावित आयत बनाइए तथा नीचे दी गयी दोनों सारणी को भी भरिए–

16 वर्ग इकाई वाली आकृतियों की संख्या	क्षेत्रफल लम्बाई × चौड़ाई (वर्ग इकाई में)	लम्बाई	चौड़ाई	परिमाप
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				

36 वर्ग इकाई वाली आकृतियों की संख्या	क्षेत्रफल लम्बाई × चौड़ाई (वर्ग इकाई में)	लम्बाई	चौड़ाई	परिमाप
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				

- **कौन से आयत का परिमाप सबसे ज्यादा है?**

16 वर्ग इकाई वाले आयत ..... 36 वर्ग इकाई वो आयत .....

- **कौन से आयत का परिमाप सबसे कम है?**

16 वर्ग इकाई वाले आयत ..... 36 वर्ग इकाई वाले आयत .....

- समान क्षेत्रफल वाले सभी आयतो को देखने के बाद आप क्षेत्रफल और परिमाप के बीच क्या कोई सम्बन्ध देखते है और उसके आधार पर क्या समान्यीकरण किया जा सकता है? उल्लेख कीजिए।

सवाल -6

किसी आयताकार आकृति के परिमाप को 15 गुना कर दिया जाये तो उसके क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ता है?

- केवल लम्बाई को बड़ा कर परिमाप में परिवर्तन किया जाये-
- केवल चौड़ाई को बड़ा कर परिमाप में परिवर्तन किया जाये-
- लम्बाई और चौड़ाई को बड़ा कर परिमाप के परिवर्तन किया जाये-

उपरोक्त बात को वर्ग, त्रिभुज और वृत्त के साथ किया जाये तो क्या हम कोई निष्कर्ष निकाल पायेंगे जिसे सामान्यीकृत किया जा सके।

सवाल-7

12 इकाई परिमाप वाले कौन से त्रिभुज, वर्ग, आयत और वृत्त का क्षेत्रफल अधिकतम है और क्यों?

- 12 इकाई परिमाप वाले सम्भावित त्रिभुज, चतुर्भुजो व वृत्त के चित्र बनाइये।
- उनके क्षेत्रफल की गणना ग्राफ या सूत्रों की सहायता से कीजिए।
- अधिकतम क्षेत्रफल वाली आकृति का पता लगाइए।

सवाल-8

आपके द्वारा बनाये गये 18 एवं 24 इकाई परिमाप वाले सभी सम्भव आयत के क्षेत्रफल की गणना करो और नीचे दी गई सारणी को भरो।

18 इकाई परिमाप वाली आकृति	परिमाप (2 लम्बाई + 2 चौड़ाई)	लम्बाई (इकाई)	चौड़ाई (इकाई)	क्षेत्रफल लम्बाई × चौड़ाई (वर्ग इकाई में)
1				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				

24 इकाई परिमाप वाली आकृति	परिमाप (2 लम्बाई + 2 चौड़ाई)	लम्बाई (इकाई)	चौड़ाई (इकाई)	क्षेत्रफल लम्बाई × चौड़ाई (वर्ग इकाई में)
1				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				

- **कौन से आयत का क्षेत्रफल सबसे ज्यादा है?**

18 इकाई परिमाप वाला आयत ..... 24 इकाई परिमाप वाला आयत .....

- **कौन से आयत का क्षेत्रफल सबसे कम है?**

18 इकाई परिमाप वाला आयत ..... 24 इकाई परिमाप वाला आयत .....

आकलन प्रश्न :

भारत के राष्ट्रीय ध्वज के निर्माण सम्बन्धी कानून में निर्देशित किया गया है कि भारतीय राष्ट्रीय ध्वज (चक्र ध्वज) में प्रति सेमी^{2} में ठीक 150 तागे तथा सिलाई के प्रत्येक टाँके में चार तागे आने चाहिए व 1 वर्ग फुट का भार ठीक 205 ग्राम होना चाहिए। (1 Sq foot = 923 सेमी^{2}) लगभग) ध्वज की चौड़ाई व लम्बाई का अनुपात 2:3 होना चाहिए।

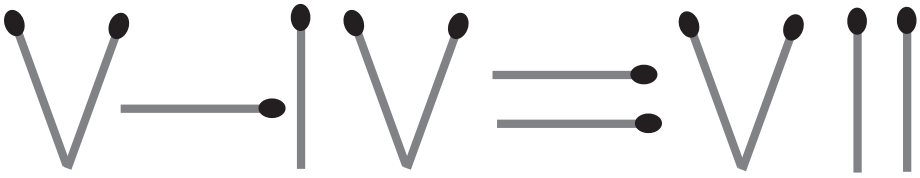
प्रश्न – यदि किसी तिरंगे की लम्बाई 450 सेमी. व चौड़ाई 300 सेमी. हो तो उसके निर्माण में लगे कुल तागों की संख्या बताइये ?

समेकन :

- यह सम्भव है कि किसी आकृति के परिमाप को परिर्वतन किये बगैर क्षेत्रफल को बदला जा सकता है।
- समान परिमाप वाले आयतों का क्षेत्रफल अलग-अलग हो सकता है।
- समान क्षेत्रफल वाले आयतों का परिमाप अलग-अलग हो सकता है।
- किसी नियत परिमाप वाली आयत की भुजाओं में परिवर्तन करने पर सबसे अधिक क्षेत्रफल वर्ग बनने पर आता है।
- यदि क्षेत्रफल को नियत कर किसी आयत की भुजाओं के अन्तर को कम कर दिया जाये। उसके परिमाप मे कमी होगी, साथ ही सबसे कम अन्तर वर्ग होने की स्थिति में होता है।
- सरल बन्द आकृतियों का परिमाप समान हो तो अधिकतम क्षेत्रफल वृत्त का होता है और न्यूनतम त्रिभुज का होता है।

जरा सिर तो खुजलाइये-

नीचे दिये गये समीकरण को संतुलित करने के लिए कोई एक तीली बदलो-



सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण 2014-15

अवधि : - दिनांक :..... से दिनांक ..... तक

प्रशिक्षण का नाम .....

नोट:- प्रतिभागी इस पश्चपोषण (फीडबैक) प्रपत्र को भरकर प्रशिक्षण के अंतिम दिन नोडल अधिकारी के पास जमा करेंगे।

पश्चपोषण (फीडबैक) प्रपत्र

पश्चपोषण प्रपत्र पर आपके द्वारा स्पष्ट व्यक्त विचार/फीडबैक आगामी प्रशिक्षण कार्यक्रमों को प्रभावी बनानें हेतु उपयोगी सिद्ध होंगे।

1. प्रशिक्षण साहित्य में कौन सा माड्यूल/संबोध आपको उपयोगी लगा और क्यों? (कम से कम दो कारण लिखिए)

   .....

   .....

2. प्रशिक्षण साहित्य में कौन सा माड्यूल/संबोध आप उपयोगी नहीं मानते है और क्यों? (कम से कम दो कारण लिखिए)

   .....

   .....

3. प्रशिक्षण अवधि में संचालित गतिविधियाँ विषयवस्तु के संप्रेषण में किस प्रकार सार्थक रही। (कम से कम दो उदाहरण लिखिए।)

   .....

   .....

4. सुगमकर्ता का संप्रेषण कौशल/फैसिलिटेशन की प्रभावकारिता (कम से कम दो बिन्दु लिखिए।)

   .....

   .....

5. माड्यूल/संबोध/गतिविधियों के संचालन हेतु आबंटित समय की पर्याप्तता। यदि समय अपर्याप्त महसूस हुआ तो समय प्रबन्धन हेतु आपके सुझाव। (कम से कम दो सुझाव लिखिए।)

   .....

   .....

6. प्रशिक्षण अनुभवों को कक्षा शिक्षण प्रक्रिया में किस प्रकार उपयोग करेंगे। (उपयोग के संदर्भ में कम से कम दो बिन्दु लिखिए।)

.....

.....

7. प्रशिक्षण के दौरान उपलब्ध कराई गई अध्ययन सामग्री/सहायक सामग्री की प्रभाव कारिता/ (कम से कम दो बिन्दु लिखिए।)

.....

.....

8. प्रशिक्षण के प्रबन्धन को और बेहतर बनाने हेतु दो उपयोगी सुझाव।

.....

.....

9. भविष्य में प्रशिक्षण हेतु आप किन-किन विषय वस्तुओं/ संबोधों को सम्मिलित करना चाहेंगे। (कम से कम दो विषय वस्तु/संबोधों कों लिखिए।)

.....

.....

10. अन्य कोई उपयोगी सुझाव (यदि कोई हो)

.....

.....

सुगमकर्ताओं के नाम -

1. .....

2. .....

हस्ताक्षर

नाम/पदनाम .....

विद्यालय .....

जनपद .....

नोडल अधिकारी के हस्ताक्षर

नोडल अधिकारी का नाम.....

नोट - कृपया इस फीडबैक प्रपत्र को अवश्य भरें तथा बी.आर.सी. समन्वयक को उपलब्ध करा दें। बी.आर.सी. समन्वयक संकलित फीडबैक प्रपत्र विश्लेषण हेतु डायट को उपलब्ध करायेंगे।

सन्दर्भ एवं स्रोत

Text Books & Reference Books -

- N.C.E.R.T. Mathematics Text Books of class 6 to 8
- Ganit ka itihas" By Dr.Brajmohan, Vani publication, New Delhi
- SCERT uttarkhand mathematics text books of class 6th to 8th
- Azim Premji Foundation Mathematics module

Journals & Articles -

- A teaching learning perspective by a Prof.K SUBRAMANIAM published in Economic & Political weekly August 30, 2003

Websites & Links -

- http://www.col.org/RESOURCES/Pages/default.aspx
- http://online.math.uh.edu/MiddleSchool/Modules/Module_4_Geometry_Spatial/Content/InductiveVersusDeductiveReasoning.pdf
- http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_elementary_algebra
- http://www.youtube.com/watch?v=lr4X5YIjwH4&feature=player_detailpage
- http://www.ucs.louisiana.edu/~sxw8045/history.htm
- http://www.gresham.ac.uk/sites/default/files/4000_years_of_algebra.pdf
- http://depssa.ignou.ac.in/wiki/images/7/7e/MathsModuleVol-II.pdf
- http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_tort/2002a.PDF
- https://www.math.ucdavis.edu/~anne/WQ2007/mat67-Common_Math_Symbols.pdf
- http://archive.org/stream/historyofmathema031756mbp#page/n5/mode/2up

suggestive resources

- Ganit kee Gatividhiya by - Arvind gupta

सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण 2014-15

अवधि : - दिनांक :..... से दिनांक ..... तक

प्रशिक्षण का नाम .....

नोटः- प्रतिभागी इस पश्चपोषण (फीडबैक) प्रपत्र को भरकर प्रशिक्षण के अंतिम दिन नोडल अधिकारी के पास जमा करेंगे।

पश्चपोषण (फीडबैक) प्रपत्र

पश्चपोषण प्रपत्र पर आपके द्वारा स्पष्ट व्यक्त विचार/फीडबैक आगामी प्रशिक्षण कार्यक्रमों को प्रभावी बनानें हेतु उपयोगी सिद्ध होंगे।

1. प्रशिक्षण साहित्य में कौन सा माड्यूल/संबोध आपको उपयोगी लगा और क्यों? (कम से कम दो कारण लिखिए)

   .....

   .....

2. प्रशिक्षण साहित्य में कौन सा माड्यूल/संबोध आप उपयोगी नहीं मानते है और क्यों? (कम से कम दो कारण लिखिए)

   .....

   .....

3. प्रशिक्षण अवधि में संचालित गतिविधियाँ विषयवस्तु के संप्रेषण में किस प्रकार सार्थक रही। (कम से कम दो उदाहरण लिखिए।)

   .....

   .....

4. सुगमकर्ता का संप्रेषण कौशल/फैसिलिटेशन की प्रभावकारिता (कम से कम दो बिन्दु लिखिए।)

   .....

   .....

5. माड्यूल/संबोध/गतिविधियों के संचालन हेतु आबंटित समय की पर्याप्तता। यदि समय अपर्याप्त महसूस हुआ तो समय प्रबन्धन हेतु आपके सुझाव। (कम से कम दो सुझाव लिखिए।)

   .....

   .....

6. प्रशिक्षण अनुभवों को कक्षा शिक्षण प्रक्रिया में किस प्रकार उपयोग करेंगे। (उपयोग के संदर्भ में कम से कम दो बिन्दु लिखिए।)

.....

.....

7. प्रशिक्षण के दौरान उपलब्ध कराई गई अध्ययन सामग्री/सहायक सामग्री की प्रभाव कारिता/ (कम से कम दो बिन्दु लिखिए।)

.....

.....

8. प्रशिक्षण के प्रबन्धन को और बेहतर बनाने हेतु दो उपयोगी सुझाव।

.....

.....

9. भविष्य में प्रशिक्षण हेतु आप किन-किन विषय वस्तुओं/ संबोधों को सम्मिलित करना चाहेंगे। (कम से कम दो विषय वस्तु/संबोधों कों लिखिए।)

.....

.....

10. अन्य कोई उपयोगी सुझाव (यदि कोई हो)

.....

.....

सुगमकर्ताओं के नाम -

1. .....

2. .....

हस्ताक्षर

नाम/पदनाम .....

विद्यालय .....

जनपद .....

नोडल अधिकारी के हस्ताक्षर

नोडल अधिकारी का नाम.....

नोट - कृपया इस फीडबैक प्रपत्र को अवश्य भरें तथा बी.आर.सी. समन्वयक को उपलब्ध करा दें। बी.आर.सी. समन्वयक संकलित फीडबैक प्रपत्र विश्लेषण हेतु डायट को उपलब्ध करायेंगे।

पठन सामग्री

सेवारत शिक्षक प्रशिक्षण क्षमता सम्ब र्द्धन

गणित प्रशिक्षण मॉड्यूल–2014–15

कक्षा – 6 से 8

1. गणित शिक्षा के लक्ष्य

स्कूलों में गणित शिक्षा के मुख्य लक्ष्य क्या हैं? सरल शब्दों में, एक मुख्य लक्ष्य है–बच्चे की विचार प्रक्रिया का गणितीकरण। डेविड व्हीलर के शब्दों में ''बहुत सारी गणित जानने के बजाय यह जानना अधिक उपयोगी है कि गणितीकरण कैसे किया जाए।"[1]

जार्ज पोल्या के अनुसार हम स्कूली शिक्षा के दो तरह के उद्देश्यों के बारे में सोच सकते हैं: पहला, अच्छा और *संकीर्ण उद्देश्य* है – रोज़गार योग्य ऐसे वयस्कों का निर्माण करना जो सामाजिक और आर्थिक विकास में योगदान दे सकें, और दूसरा *ऊँचा उद्देश्य* है – बढ़ते बच्चे के आंतरिक संसाधनों का विकास करना।[2] स्कूली गणित के परिप्रेक्ष्य में पहला उद्देश्य विशिष्टत: संख्यात्मकता से संबंधित है। प्राथमिक स्कूल अंक और उन पर संक्रियाएँ, मात्राओं का मापन, भिन्न, प्रतिशत और अनुपात सिखाते हैं: ये सभी संख्यात्मकता के लिए महत्त्वपूर्ण हैं।

परन्तु ये उद्देश्य क्या हैं? बच्चे के आंतरिक संसाधनों के विकास में जो भूमिका गणित निभा सकता है वह है सोच (चिंतन) का विकास करना। गणितीय उपक्रम में विचारों की स्पष्टता और तार्किक निष्कर्षों तक पहुँचने में पूर्वानुमानों पर कार्य करना मुख्य है। सोचने के कई तरीके हैं, और जिस तरह की योग्यता कोई गणित में सीखता है वह है अमूर्त विचारों के साथ काम करना।

इससे भी ज्यादा महत्त्वपूर्ण यह है कि गणित कार्य करने की विधियाँ देता है। गणितीय समस्याओं को हल करने की योग्यता प्रदान करता है, और ज़्यादा सामान्य रूप में, समस्या समाधान के लिए सही अभिवृत्ति और सभी प्रकार की समस्याओं को व्यवस्थित रूप से हल करने की योग्यता भी देता है।

यह ऐसी पाठ्यचर्या की माँग करता है जो महत्वाकांक्षी, सुसंगत हो और महत्त्वपूर्ण गणित सिखा सके। महत्त्वाकांक्षी इस अर्थ में हो कि यह मात्र संकीर्ण उद्देश्य को प्राप्त करने के बजाय ऊपर उल्लेखित ऊँचे उद्देश्य को प्राप्त कर सके। यह सुसंगत इस अर्थ में होना चाहिए कि विभिन्न प्रकार की विधियाँ और कौशल जो कि (अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति में) उपलब्ध हैं संयुक्त रूप से बच्चे को हाई स्कूल में विज्ञान और सामाजिक विज्ञान में आनेवाली समस्याओं को हल करने में सहायता दे सकें। यह महत्त्वपूर्ण इस अर्थ में होना चाहिए कि विद्यार्थी ऐसी समस्याओं को हल करने की आवश्यकता महसूस करें, विद्यार्थी और शिक्षक इन समस्याओं को हल करने में अपने समय और ऊर्जा देना उचित समझें और गणितज्ञ इसे एक गतिविधि समझें जो गणितीय रूप से लाभकर हो। ध्यान दें कि ऐसा महत्त्व अपने-आप ही नहीं समझ आएगा, पाठ्यचर्या ही इसे आकार देने में सहायता कर सकती है। इन सभी आवश्यकताओं का एक महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष यह है कि स्कूली गणित गतिविधियों पर केंद्रित होना चाहिए।

भारतीय संदर्भ में जो एक और मुख्य चिंता है जिसका प्रभाव स्कूली शिक्षा के सभी क्षेत्रों पर है, वह है **स्कूली शिक्षा का सार्वभौमिकरण**। पाठ्यचर्या पर चर्चा में उसके दो महत्त्वपूर्ण बिंदु निहितार्थ हैं, विशेषकर गणित में। पहला है स्कूली शिक्षा विधिक अधिकार है और अध्ययन में गणित एक अनिवार्य विषय है, इसलिए अच्छी गणित शिक्षा हर बच्चे का अधिकार है। भारतीय परिस्थितियों में जहाँ कुछ ही बच्चों की पहुँच महँगे सामानों तक होती है। हम चाहते हैं गणित शिक्षा सभी वहन कर सकें और साथ ही यह आनन्ददायक हो। इसका आशय है कि गणित शिक्षा बच्चे की जीवंत वास्तविकताओं में स्थित हो, और व्यवस्था बच्चे के बजाय विषय को ज़्यादा अहमियत न दे, बल्कि इसका उल्टा करे।

दूसरा, इस देश में जहाँ प्रारंभिक चरण में आधे बच्चे स्कूल छोड़ देते हैं, गणित की पाठ्यचर्या केवल उच्चतर माध्यमिक और विश्वविद्यालयी शिक्षा की तैयारी के लिए निर्मित नहीं होनी चाहिए। यदि हम अगले दशक में अपने अभीष्ट सार्वभौमिकरण के लक्ष्यों को भी प्राप्त कर लेते हैं तो भी हमारे पास कक्षा 8वीं के बाद स्कूली व्यवस्था को छोड़ने वाले बच्चों का एक बड़ा अनुपात होगा। अत: यहाँ यह पूछना उचित होगा कि ऐसे बच्चों को बाद में अपने जीवन में आने वाली चुनौतियों का सामना करने के लिए आठ वर्षों की गणित शिक्षा क्या देती है?

जीवन कौशल और जीविका से स्कूली शिक्षा के संबंध के बारे में बहुत कुछ लिखा गया है। यह निश्चित रूप से सच है कि प्राथमिक स्तर पर पढ़ाए गए कई कौशल दैनिक जीवन में उपयोगी होते हैं। तथापि पीछे बताए गए उच्च लक्ष्यों पर विचार करते हुए पाठ्यचर्या के पुनः उन्मुखीकरण से बच्चों द्वारा स्कूली समय का बेहतर उपयोग होगा, इस रूप में कि यह बच्चों में समस्या समाधान और विश्लेषण कौशल निर्मित करेगा तथा उन्हें जीवन में आने वाली विभिन्न प्रकार की समस्याओं को बेहतर तरीके से हल करने के लिए तैयार करेगी।

पाठ्यचर्या की रूपरेखा में गणित शिक्षा के स्थान के बारे में हमारा चिंतन इन जुड़वाँ सरोकारों पर आधारित हैं : एक, प्रत्येक छात्र के मस्तिष्क को व्यस्त रखने के लिए गणित शिक्षा क्या कर सकती है और दूसरा कि यह उसकी आंतरिक शक्तियों को किस प्रकार मजबूत कर सकती है। स्कूल में हम गणित शिक्षा के प्रति अपना दृष्टिकोण समझाते हैं, विचारणीय मुख्य क्षेत्रों को वर्णित करने का प्रयास करते हैं और इन जुड़वाँ परिप्रेक्ष्यों पर आधारित सरोकारों को संबोधित करने हेतु सिफ़ारिशें करते हैं।

हमारे बहुत से विचार एन.सी.टी.एम., संयुक्त राज्य अमेरिका[3], द न्यूजर्सी मैथेमैटिक्स कॉएलिशन[4], केलिफोर्निया स्टेट बोर्ड ऑफ़ एजुकेशन[5] के गणित शैक्षिक विषयवस्तु मानक, सिंगापुर गणित पाठ्यचर्या[6], दि मैथेमैटिक्स लर्निंग एरिया स्टेटमेंट्स ऑफ़ आस्ट्रेलिया एंड न्यूजीलैंड[7] और नेशनल करीकुला ऑफ़ फ्रांस, हंगरी[8], और यूनाइटेड किंगडम[9], में गणित पाठ्यचर्या पर चर्चाओं से निर्मित हुए हैं। फेरीनि-मुंडे तथा उनके सहयोगियों ने फ्रांस के गणित की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या और शिक्षण क्रियाओं की ब्राजील, मिस्र, जापान, केन्या, स्वीडन और यू.एस.ए.[10] से तुलना कर एक रुचिपूर्ण चर्चा प्रस्तुत की।

2. एक दृष्टि कथन

हमारी दृष्टि में स्कूली गणित उन परिस्थितियों में होता है, जहाँ :

- बच्चे *गणित में आनंद लेना सीखें :* यह एक महत्त्वपूर्ण लक्ष्य है जो कि इस आधार वाक्य पर आधारित है कि गणित का जीवन भर उपयोग और आनंद लिया जा सकता है, और इसलिए इस प्रकार का स्वाद पैदा करने के लिए स्कूल उचित जगह है। दूसरी तरफ गणित के प्रति भय उत्पन्न करना (या इसे दूर न करना) बच्चों को जीवन की एक अहम और ज़रूरी योग्यता से वंचित कर सकता है।
- बच्चे *महत्त्वपूर्ण गणित सीखें :* गणित को सूत्रों और यांत्रिक क्रियाओं तक सीमित रखना बहुत नुकसान पहुँचाता है। किसी गणितीय तकनीक का कहाँ तथा कैसे उपयोग करना है, इस चीज को समझना ज़्यादा महत्त्वपूर्ण है न कि उस तकनीक को याद रखना (जो कि किसी पुस्तक का उपयोग करके आसानी से किया जा सकता है)। स्कूल को ऐसी समझ पैदा करने की ज़रूरत है।
- बच्चे गणित को इस रूप में देखें कि इसके बारे में वे बात करें, संप्रेषण करें, आपस में चर्चा करें, और उस पर मिलकर कार्य करें। गणित को *बच्चे के जीवनानुभवों का एक अंश बनाना* सबसे अच्छी गणित शिक्षा है।
- बच्चे *अर्थपूर्ण गणितीय समस्याएँ प्रस्तुत तथा हल करें :* स्कूल में गणित ऐसा क्षेत्र है जो औपचारिक रूप से सवाल हल करने की कुशलता पर केंद्रित है। यदि इसे किसी के जीवन में उपयोग में आने वाली एक योग्यता के रूप में समझें तो स्कूल में सीखी गई तकनीक और विधियों का महत्त्व बढ़ जाता है। गणित रुचिपूर्ण समस्याएँ बनाने का भी अवसर देता है और नए संवाद निर्मित करता है।
- बच्चे संबंधों को समझने में, संरचना को देखने, वस्तुओं के बारे में तर्क करने में, कथनों की सत्यता या असत्यता पर तर्क करने में, अमूर्तनों का प्रयोग करें। *तार्किक चिंतन* महान उपहार है जो गणित हमें प्रदान कर सकता है, और इस प्रकार के विचार और संप्रेषण की आदतें बच्चों में विकसित करना गणित शिक्षा का मुख्य उद्देश्य है।
- बच्चे *गणित की मूल संरचना* को समझें : अंकगणित,

बीजगणित, ज्यामिति और त्रिकोणमिति जो कि स्कूली गणित के मुख्य क्षेत्र हैं सभी अमूर्तीकरण, संरचना-निर्माण और सामान्यीकरण की क्रियाविधि प्रदान करते हैं। गणित के क्षेत्र और शक्ति के महत्त्व की समझ हमारी प्रवृत्तियों को अद्वितीय रूप से निखारेगी।

- शिक्षक कक्षा में हर छात्र की शैक्षिक गतिविधियों से जुड़ाव की अपेक्षा रखे: इससे कम पर समझौता करने का मतलब होता है कि वह भविष्य में विद्यार्थियों को व्यवस्थित विलगाव की ओर ले जाएगा। मेधावी बच्चों को उनके स्तर के अनुकूल चुनौतियाँ प्रदान करते हुए सभी बच्चों की सहभागिता सुनिश्चित करना खुद में एक चुनौती है। अध्यापकों को साधन और संसाधनों को प्रदान करना शिक्षण तंत्र की सेहत के लिए आवश्यक है।

यह दृष्टि (विज़न) हमारे देश में स्कूली शिक्षा को प्रभावित करने वाली केंद्रीय समस्याओं के निदान पर आधारित है। यह सारी इस सोच पर आधारित है कि क्या किया जा सकता है, तथा क्या किया जाना चाहिए।

इसके पूर्व कि हम विज़न (दृष्टि) प्रस्तुत करें, गणित पाठ्यचर्या के ढाँचों के इतिहास पर एक सरसरी नजर डाल लेना युक्तिसंगत होगा।

3. एक संक्षिप्त इतिहास

शब्दोपत्ति शास्त्र की दृष्टि से कॅरिकुलम (पाठ्यचर्या) शब्द की उत्पति लैटिन शब्द से हुई है जिसका अर्थ होता है दौड़ का मैदान। यहाँ दौड़ यानी रेस शब्द समय और मार्ग का द्योतक है। पाठ्यचर्या को वास्तव में एक तय समय के अंदर दिए हुए पाठ्यक्रम को पूरा किए जाने से जोड़कर देखा जाता है। लेकिन अध्ययन क्षेत्र के रूप में पाठ्यचर्या का विकास 1890 के दशक से शुरू हुआ। यह अलग बात है कि शिक्षा के चिंतक और विचारक सदियों से इस क्षेत्र में रुचि रखते रहे तथा खोज करते रहे। जर्मन विचारक जोहान फ्रेडरिक हरबर्ट (1776-1841) को पाठ्यचर्या क्षेत्र के विकास से जोड़कर देखा जाता है। हरबर्ट ने अपने शिक्षण/अधिगम सिद्धांतों में विषयवस्तु के चयन और संगठन पर बल दिया है। पाठ्यचर्या पर केंद्रित पहली पुस्तक *दि कॅरिकुलम* फ्रैंकलिन बॉबिट द्वारा लिखित 1918 में प्रकाशित हुई तथा उसके बाद 1924 में *हाउ टु मेक कॅरिकुलम* छपी। अमेरिका में 1926 में *नेशनल सोसाइटी ऑफ़ द स्टडी ऑफ एजुकेशन* ने *दि फाउंडेशन एंड टेकनिक ऑफ़ कॅरिकुलम कंस्ट्रक्शन* विषय पर वार्षिक पुस्तिका प्रकाशित की। इस तरह 1890 से शुरू होकर पाठ्यचर्या विकास आंदोलन पूरी दुनिया का एक सशक्त आंदोलन बन गया।

ऐतिहासिक संदर्भ में स्कूल व्यवस्था अपेक्षाकृत एक नया शब्द है जो विगत दो सौ सालों में विकसित हुआ तथा वजूद में आया। इसके पहले पश्चिमी देशों में कुछ स्कूल थे जो धार्मिक संगठनों से संबद्ध थे। इन स्कूलों का मकसद था पढ़ा-लिखा पुरोहित पैदा करना। गणित में रुचि पुरानी और अल्पविकसित थी। इसमें विभिन्न तरह की संख्याएँ, विभिन्न आकृतियाँ तथा धार्मिक क्रियाकलापों की तिथियों को तय करने में मदद के लिए खगोल विज्ञान की पर्याप्त जानकारी शामिल थी। लेकिन **भारत में शिक्षा पद्धति पूर्णरूपेण विकसित और एक स्थापित सामाजिक प्रक्रिया थी।** अंकगणित तथा खगोल विज्ञान इसके मुख्य अंग थे। धार्मिक क्रियाकलापों तथा बलियों के लिए पावन समय तय करने के लिए खगोल विज्ञान ज़रूरी माना जाता था। विभिन्न प्रकार के 'हवन कुंड' तथा बलिवेदी तैयार करने के लिए ज्यामिति पढ़ायी जाती थी। अंग्रेजों के आगमन के साथ शिक्षा प्रणाली में व्यापक बदलाव आए। भारतीयों को शिक्षित करने के लिए पश्चिमी शिक्षा पद्धति की तर्ज़ पर पढ़ाई शुरू की गई जिससे अंग्रेज़ी शासन का कामकाज सुचारु रूप से चल सके।

लेकिन गणित में ज़्यादातर पाठ्यचर्या का विकास पिछले तीस/चालीस वर्षों में हुआ है। यह नयी तकनीकी क्रांति की वज़ह से हुआ है जिसका औद्योगिक क्रांति के रूप में समाज पर प्रभाव पड़ा है। इसलिए आधुनिक तकनीकी की वज़ह से शैक्षिक उद्देश्यों पर फिर से विचार करने की ज़रूरत है जिससे पाठ्यचर्या विकास की प्रक्रिया गतिशील हो सके। सूक्ष्म दृष्टि से देखें तो गणित

स्वयं भी नयी तकनीकों से प्रभावित है क्योंकि नयी तकनीकों के विकास के साथ ही नयी गणितीय शाखाओं का विकास हुआ तथा 'समय की बर्बादी' करने वाली तकनीकों का उपयोग कम हुआ। इसके अलावा प्रौद्योगिकी में होने वाले नए विकास के साथ कदम मिलाकर चलने के प्रयास में भी गणित शिक्षण प्रभावित होता है। इससे अधिक पूरे विश्व में गणित की पाठ्यचर्या में एक भारी समानता है। इसका परिणाम यह होता है कि पाठ्यचर्या विकसित करने वालों द्वारा किया गया कोई भी बदलाव अन्य लोगों द्वारा भी अपनाया या नकल किया जाता है। उदाहरण के लिए, भारत में नयी गणित की एक लहर चली थी। बाद में अन्य देशों की प्रवृत्तियों का अनुसरण करते हुए नयी गणित की लहर यहाँ भी कम हो गई। पाठ्यक्रम विकास की विभिन्न प्रवृत्तियों को देखते हुए हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह एक स्थिर प्रक्रिया नहीं है बल्कि एक गतिशील प्रक्रिया है और इसका फोकस सूचनापूर्ण सामग्री के चयन और संगठन से हटकर एक ऐसी पाठ्यचर्या के विकास की ओर हो गया है जो 'जीवन को उसकी वास्तविकता में प्रकट कर सके।'

वर्ष 1937 में जब गांधी जी ने बुनियादी शिक्षा का विचार दिया तो उनके विचारों को विस्तार देने के लिए ज़ाकिर हुसेन कमेटी गठित की गई। इसने सुझाव दिया: 'गणित का ज्ञान किसी भी पाठ्यचर्या का आवश्यक भाग है। प्रत्येक बच्चे से यह अपेक्षा की जाती है कि वह दस्तकारी के काम या व्यक्तिगत तथा समुदाय की चिंताओं तथा क्रियाकलापों के लिए ज़रूरी गणनाएँ खुद कर सकें।' सन् 1952 में नियुक्त किए गए माध्यमिक शिक्षा आयोग ने भी स्कूलों में अनिवार्य विषय के रूप में गणित की आवश्यकता पर बल दिया।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 1968 के सुझावों को ध्यान में रखते हुए जब एन.सी.ई.आर.टी ने अपना ''कॅरिकुलम फॉर 10 ईयर स्कूल'' प्रकाशित किया तो उसमें इस बात पर बल दिया गया कि स्वचालन और सायबरीकरण की इस सदी के आगमन से नयी औद्योगिक क्रांति की शुरुआत के चिह्न दिख रहे हैं। यह गणित के अध्ययन पर विशेष ध्यान दिए जाने के लिए और ज़रूरी है। इसने गणित शिक्षण में खोजी दृष्टिकोण पर जोर दिया।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 1986 ने इसे आगे बढ़ाते हुए कहा: गणित को बच्चे को सोचने, तर्क करने, विश्लेषण करने और तार्किक रूप से बोलने के लिए प्रशिक्षित करने के साधन के रूप में देखा जाना चाहिए। इसे एक विशिष्ट विषय के अलावा दूसरे विषयों के सहगामी के रूप में देखा जाना चाहिए जिनमें विश्लेषण और तर्क की ज़रूरत होती है।

विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.एस.ई.) 2000 का दस्तावेज़ भी इन भावनाओं को प्रकट करता है। इन उपदेशों के इतिहास के बावजूद गणित शिक्षा कुल मिलाकर वैसी ही रही है, संकीर्ण लक्ष्यों पर केंद्रित।

4. गणित के शिक्षण और सीखने की समस्याएँ

हमारे स्कूलों में गणित शिक्षा के किसी भी विश्लेषण से कई समस्यात्मक मुद्दों की पहचान की जा सकती है। इन मुद्दों को समझने के लिए हम निम्न 4 मुख्य समस्याओं पर प्रकाश डालेंगे जिन्हें हम अपनी चिंता के मूल क्षेत्र मानते हैं :

1. ज़्यादातर बच्चों में गणित को लेकर डर व असफलता का भाव।
2. पाठ्यचर्या, जो छोटे-से प्रतिभाशाली वर्ग के साथ ही असहभागी बड़े वर्ग, दोनों को ही निराश करती है।
3. मूल्यांकन की अपरिष्कृत विधियाँ जो गणित को यांत्रिक गणनाओं के रूप में देखने के दृष्टिकोण को बढ़ावा देती हैं।
4. गणित शिक्षण में शिक्षकों की तैयारी और सहायता का अभाव। इसमें से प्रत्येक के विस्तार की आवश्यकता है क्योंकि वे पाठ्यचर्या ढाँचे को आवश्यक रूप से प्रभावित करता है।

4.1 भय और असफलता

यदि अध्ययन का कोई भी विषय विस्तृत भावनात्मक टिप्पणी को आमंत्रित करता है तो वह गणित है। जबकि

तमिल में शिक्षित कोई भी व्यक्ति खुलेआम किसी *तिरक्कुरल* की अनभिज्ञता स्वीकार नहीं करेगा (या कम से कम बिना किसी शर्म के एहसास के तो कतई नही), उसी तरह किसी व्यक्ति के लिए गर्व से यह कहना कि वह कभी गणित नहीं सीख पाया, बड़ा मुश्किल है। ऐसे में जबकि ये वयस्क अभिवृत्तियाँ हो सकती हैं, बच्चों में (जो कि गणित की परीक्षा उतीर्ण करने के लिए बाध्य हैं), गणित को लेकर अक्सर चिंता और भय होता है। गणित की चिंता और 'मैथ फोबिया' पदों का उपयोग लोकप्रिय साहित्यों में किया गया है।[11]

भारतीय संदर्भ में ऐसी चिंताओं के विशेष आयाम हैं। प्रारंभिक शिक्षा का सार्वभौमिकरण एक राष्ट्रीय प्राथमिकता और प्रारंभिक शिक्षा एक वैधिक अधिकार है। इन दोनों के एक साथ होने की इस ऐतिहासिक परिस्थिति में बच्चों को विद्यालय से विमुख करने और उनकी असहभागिता में योगदान देने और अंततः उन्हें तंत्र का बहिष्कार करने के लिए प्रेरित करने वाले सभी पहलुओं पर ध्यान देने के लिए गंभीर प्रयास किए जाने चाहिए। यदि विद्यालय में पढ़ाया जाने वाला कोई भी विषय इस प्रक्रिया में सार्थक भूमिका निभाता है तो गणित का भय इस सूची में अवश्य ही सबसे पहले स्थान पर रखा जाएगा।

ऐसा भय असफलता के बोध से बड़े निकट से जुड़ा है। कक्षा 3 व 4 से अधिकांश बच्चे गणित की माँगों को पूरा करने में स्वयं को कमज़ोर तथा अयोग्य पाते हैं। उच्चतर विद्यालय में जो बच्चे साल के अंत में होने वाली परीक्षाओं में केवल एक या दो विषयों में अनुत्तीर्ण होते हैं और इस कारण रोक दिए जाते हैं, उनमें सबसे ज़्यादा होते हैं गणित में अनुत्तीर्ण होने वाले बच्चे। यह आँकड़ा कक्षा 10 तक जारी रहता है, उस समय तक, जब तक भारतीय राज्य विद्यार्थी को शिक्षा का प्रमाण-पत्र नहीं देते। बोर्ड परीक्षाओं में असफलता के कारणों में गणित सबसे बड़ा कारण है।

स्कूल में गणित के प्रति डर की क्या वज़हें हैं, इस पर कई अध्ययन और विश्लेषण किए गए हैं। इनमें प्रमुख है गणित की संचयी प्रकृति। यदि आपको दशमलव में कठिनाई है तो आपको प्रतिशत भी कठिन लगेंगे। यदि आपको प्रतिशत कठिन लगते हैं तो आपको बीजगणित में भी कठिनाई होगी। और इसी प्रकार गणित के अन्य प्रकरण भी कठिन लगेंगे। एक अन्य मुख्य कारण प्रतीकात्मक भाषा का प्रभुत्व। जब प्रतीकों को बिना समझे प्रयुक्त किया जाता है तो एक समय के बाद कई बच्चों पर नीरसता और घबराहट हावी होने लगती है और मनोविच्छेद/पार्थक्य विकसित होता है।

भारतीय शिक्षा प्रणाली में, गणित में असफलता सामाजिक सूचकों के रूप में भी प्रकट होती है। भारतीय शिक्षा में संरचनात्मक समस्याएँ, वर्ग, जाति और लिंग के आधार पर सामाजिक भेदभाव को भी दर्शाती हैं और इसमें योगदान देती हैं। प्रचलित सामाजिक प्रवृत्तियाँ जो लड़कियों को गणित की दृष्टि से अयोग्य मानती हैं या, जो सदियों से ऊँची जातियों को औपचारिक अभिकलनी योग्यताओं से जोड़ती रही हैं, इन असफलताओं को और अधिक गहरा करती हैं।

पाठ्यपुस्तकों में प्रयोग में लाई गई भाषा से उत्पन्न समस्याओं का खास उल्लेख किया जाना चाहिए। देश के बच्चों के एक बहुत बड़े भाग के लिए गणित में उपयोग की गई भाषा उनकी रोज़मर्रा की भाषा से बहुत अलग होती है और मुख्यतः प्राथमिक स्तर पर अप्रीतिकर होती है। यह अपने आप में बच्चों को गणित से अलग करने का मुख्य कारण बन जाती है।

4.2 निराशाजनक पाठ्यचर्या

कोई भी गणित पाठ्यचर्या जो समझने से ज़्यादा ज़ोर विधियों ओर सूत्रों के ज्ञान को देती है, और चिंता तथा निराशा को बढ़ाती है। स्कूली गणित की प्रचलित विधियों को देखें तो पाएँगे, बच्चों का एक बड़ा भाग ज़ल्दी ही चुपचाप हार मान लेता है। बचे हुए गणित में अनुतीर्ण होकर संतुष्ट हो जाते हैं या इसे अच्छे रूप में देखें तो निम्न स्तर बनाए रखते हुए उतीर्ण हो जाते हैं। इन बच्चों के लिए यह पाठ्यचर्या परीक्षा पास करने के लिए अस्थायी रूप से उधार लिए गए तथ्यों के भंडार की तरह है।

दूसरी ओर यह व्यापक रूप से स्वीकर किया जाता

है कि कुछ बच्चों में काफी कम उम्र से ही दूसरे विषयों की तुलना में गणित में अत्यधिक लगन और प्रतिभा नजर आती है।[12] ये वे बच्चे हैं जो क्वांटाइजेशन और बीजगणित को सरलता से लेते हैं तथा बड़ी आसानी से जारी रखते हैं।

पाठ्यचर्या ऐसे होनहार बच्चों को जो प्रदान करती है, वह भी निराशाजनक है। तथ्यात्मक गहराई तथा चुनौतियाँ न प्रदान करके पाठ्यचर्या उनकी अभिप्रेरणा का न्यूनतम उपयोग करने तक सीमित रखी जाती है। अधिगम विधियाँ उनके लिए आसान हो सकती हैं परंतु उनकी समझ तथा तर्क-क्षमता का उपयुक्त अभ्यास नहीं हो पाता।

4.3 अपरिष्कृत मूल्यांकन

हमने डर व असफलता की बात की। ऐसे में जबकि कक्षा में जो होता है वह कक्षा से अलग ज़रूर करता है, लेकिन उस तरह की घबराहट और आतंक नहीं पैदा करता जैसा कि परीक्षा करती है। ऊपर उल्लेखित अधिकांश समस्याएँ स्कूली गणित में विधि की तानाशाही और सूत्रों को रटने से संबंधित हैं। गणित में विधि के प्रभुत्व का मुख्य कारण मूल्यांकन व निर्धारण की प्रकृति है। परीक्षणों का निर्माण (केवल) विद्यार्थी के गणितीय विधि के ज्ञान और तथ्यों तथा सूत्रों के याद करने की क्षमता को जानने के लिए ही किया जाता है। स्कूली जीवन में परीक्षा में प्रदर्शन की महत्ता के मद्देनजर संकल्पना अधिगम की जगह प्रक्रियाजन्य याददाश्त ने ले ली है। वे बच्चे जो यह बदलाव सफलतापूर्वक नहीं कर पाते, तनाव का अनुभव करते हैं और असफलता का सामना करते हैं।

ऐसे में जबकि गणित एक ऐसा आधार है जहाँ बच्चे विद्यालय में औपचारिक तौर से समस्या समाधान कौशल सीख सकते हैं, यही केवल ऐसा क्षेत्र भी है जहाँ बच्चे प्रश्नों का उतर देते समय खेल सकते हैं। गणित में प्रत्येक प्रश्न का एक खास उत्तर होता है ऐसा देखा जाता है, उसे या आप जानते हैं या फिर नहीं जानते। भाषा में, सामाजिक विज्ञान में, या यहाँ तक कि विज्ञान में भी, आप प्रश्न को आंशिक तौर पर हल करने का प्रयास कर सकते हैं, अपना आधा अधूरा ज्ञान प्रकट कर सकते हैं (जैसा कि विद्यार्थी देखते हैं) परंतु गणित में ऐसा करने की कोई संभावना नहीं है। वास्तव में इस तरह की विचारधारा विद्यार्थियों के लिए चिंता की बात है।

आश्चर्यजनक रूप से जब गणित शिक्षा में इतना अधिक शोधकार्य चल रहा है और इससे शिक्षण-शास्त्र तथा पाठ्यचर्या में कुछ बदलाव आए हैं, हमारे स्कूलों में वह क्षेत्र जिसमें पिछले या उससे अधिक वर्षों के दौरान थोड़ा बहुत ही परिवर्तन आया है वह है गणित में मूल्यांकन पद्धतियाँ। यह महज संयोग नहीं है कि कक्षा VIII की तिमाही परीक्षा तथा कक्षा X की बोर्ड परीक्षा के प्रारूप में बहुत फ़र्क नहीं है। केवल यही नहीं पाठ्यपुस्तकों के अध्यायों के अन्त में दिए अभ्यास प्रश्नों का प्रारूप भी समान ही है। देखने में आता है कि हमेशा किसी सवाल को हल करने में एक सूचना का अनुप्रयोग निहित रहता है जो कि सतही जाँच हैं। यदि प्रणाली में कोई बुनियादी बदलाव होना है तो जाहिर है कि ऐसी पुरातन और अपरिष्कृत मूल्यांकन विधियों में व्यापक तौर पर संशोधन होना चाहिए।

4.4 शिक्षक की अपर्याप्त तैयारी

किसी दूसरे विषय के मुकाबले गणित शिक्षा, शिक्षक की अपनी तैयारी, उसकी अपनी गणित की समझ, गणित के स्वभाव की समझ तथा उसकी अपनी अध्यापन - विधा की तकनीकों पर बहुत हद तक निर्भर करता है। पाठ्यपुस्तक केंद्रित अध्यापन-विधा शिक्षक की स्वयं की गणितीय गतिविधि को सुस्त बना देती हैं।

गणित की पढ़ाई में कुछ खास कठिनाइयाँ होती हैं। प्राथमिक स्तर पर अधिकांश शिक्षकों की यह मान्यता होती है कि जितना ज़रूरी है, उतनी गणित उन्हें आती है और किसी विशेष शिक्षक प्रशिक्षण के अभाव में वे केवल उन्हीं विधियों और तरीकों को इस्तेमाल में लाते हैं जिन्हें उन्होंने अपने स्कूली जीवन में सीखा था। नतीजा यह होता है कि समय बदलने के साथ पठन-पाठन में कोई बदलाव नहीं आता तथा ये समस्याएँ जस की तस बनी रहती हैं।

माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तर पर कुछ शिक्षक एक अलग तरह की स्थिति का सामना करते हैं। होता यह है कि उनके स्कूली समय से पाठ्यक्रम बहुत बदल चुके होते हैं और शिक्षकों के लिए व्यवस्थित और सतत शिक्षण कार्यक्रमों के अभाव में उनका मूलभूत ज्ञान अनेक संकल्पनात्मक क्षेत्रों में उतना मजबूत नहीं रहता। इससे वे बाज़ार में उपलब्ध नोट्स पर निर्भर करते हैं जो कि विद्यार्थियों के लिए बहुत मददगार सिद्ध नहीं होता।

ऐसे में जब शिक्षक की अपर्याप्त तैयारी व सहायता पूरे स्कूली गणित पर नकारात्मक प्रभाव डालती है, इसका नतीजा जो प्राथमिक स्तर पर होता है वह यह है: गणित अध्यापन-विधा, बाल मनोविज्ञान के अध्ययन परिणामों से बिरले ही मेल खाती है। उच्च प्राथमिक स्तर पर जब अमूर्तन की भाषा का रूपांतरण बीजगणित में हो जाता है, अपर्याप्त शिक्षक तैयारी औपचारिक गणित को अनुभवात्मक अधिगम से जोड़ पाने की असमर्थता के रूप में प्रतिबिंबित होती है। बाद में इसका प्रभाव गणित तथा दूसरे विषयों के साथ उसके संबंध स्थापित करने तथा विज्ञान में इसके अनुप्रयोग की अक्षमता के रूप में परिलक्षित होता है। इससे विद्यार्थी महत्त्वपूर्ण अभिप्रेरण और प्रोत्साहन से वंचित हो जाते हैं।

4.5 अन्य व्यवस्थागत समस्याएँ

हम कुछ अन्य समस्याओं के व्यवस्था जनित स्रोतों का संक्षेप में उल्लेख करना चाहेंगे। एक मुख्य समस्या है **कोष्ठीकरण** (कंपार्टमेंटलाइजेशन) : गणित के प्राथमिक स्कूल तथा हाईस्कूल के शिक्षकों के बीच बहुत ही कम संवाद हैं तथा हाईस्कूल तथा कॉलेज के अध्यापकों के बीच तो और भी कम संवाद हैं। ज़्यादातर स्कूली अध्यापकों ने तो गणित के शोधकर्ताओं को कभी देखा भी नहीं होगा, उनसे मिलना-जुलना तथा बातचीत तो दूर की बात है। वे लोग जो अध्यापक शिक्षा से जुड़े हैं वे कॉलेज या शोध गणित की दुनिया से बाहर हैं।

एक अन्य मुख्य समस्या है, **पाठ्यचर्या का गतिमान होना :** एक पीढ़ी पहले विद्यार्थी कॉलेज में आने पर कलन पढ़ते थे। उसके पहले की पीढ़ी में विश्लेषण ज़्यामिति को कॉलेज का गणित माना जाता था। परंतु ये सभी प्रकरण आज स्कूली पाठ्यक्रम के भाग हैं। ऐसी स्थिति में स्वाभाविक रूप से कुछ प्रकरण काट-छाँट दिए जाते हैं: आज ठोस ज़्यामिति या गोलीय ज्यामिति बहुत कम है। इस संकीर्णता का एक कारण यह है कि अंडरग्रेजुएट विज्ञान, अभियांत्रिकी व प्रौद्योगिकी में कलन व अवकल समीकरण बहुत अधिक महत्त्वपूर्ण होता है और इसलिए यह अनुभव किया गया कि इन प्रकरणों को जल्दी प्रारंभ करने से विद्यार्थियों को आगे इन्हें पढ़ने में सहायता मिलेगी। तर्क जो भी हो, **गणित शिक्षा का आकार चौड़े और गोलीय होने के स्थान पर ज़्यादा ऊँचा और तकुआकार हो गया है।**

हमने **जेंडर** को एक व्यवस्थागत मुद्दा माना था। यहाँ से थोड़ा विस्तार से समझना अच्छा होगा। गणित के बारे में एक धारणा है कि यह पुरुषों का क्षेत्र है। पाठ्यपुस्तकों में महिला गणितज्ञों के बारे में जानकारी न होने से इस धारणा को बल भी मिलता है। पाठ्यचर्या निर्माण में सामाजिक सरोकारों का अभाव भी एक कारण है तथा सवालों में महिलाओं के जीवन की अनुपस्थिति भी इस तरह की भावना पैदा करती है। गणित की पाठ्यपुस्तकों के एक अध्ययन से पता चला कि महिलाओं के कपड़ों के बारे में कोई बात नहीं थी जबकि बहुत से सवाल कपड़ों और उनकी खरीददारी, इत्यादि पर थे।[13]

कक्षाओं के ऊपर किए गए शोध भी बताते हैं कि लड़कियों को गणित में 'विशेषज्ञता' के योग्य न मानकर उनका व्यवस्थित अवमूल्यन होता है जबकि वे गणित में शाब्दिक और ज्ञानात्मक कार्य बहुत अच्छे से पूरा करती हैं। यह भी देखा गया है कि शिक्षक लड़कियों से अधिक लड़कों को संबोधित करते हैं जिससे पुरुष की आदर्श अधिगमकर्ता के रूप में पुष्टि होती है। जब अनुदेशनात्मक निर्णय शिक्षक के हाथ में होते हैं उनकी अधिगम योजनाएँ लिंग संबंधी धारणाओं सें ओतप्रोत होती हैं। लड़कों के साथ वे अधिक आविष्कृत समस्या समाधान युक्तियों का उपयोग करते हैं जिससे अधिक अच्छी तथ्यात्मक समझ प्रतिबिंबित होती है।[14] अध्ययन बताते हैं कि शिक्षक लड़कों की गणितीय 'सफलता' को 'योग्यता' से जोड़ कर देखते हैं

तथा लड़कियों की सफलता को उनके प्रयत्नों के रूप में देखते हैं।[15] कक्षा की बातचीत भी यह संकेत देती है कि किस तरह से गणित का 'पुलिंगीकरण' होता है और स्कूल में शैक्षिक प्रतियोगिताओं की धारणाएँ विकसित करने में जेंडर सिद्धांतों का गहरा प्रभाव पड़ता है।[16] गणित में अपने प्रदर्शन के साथ स्कूल की सफलता को चिह्नित करके भी लड़कियाँ निश्चित तौर पर घाटे में हैं।

5. सिफ़ारिशें

जहाँ समस्याओं और चुनौतियों की स्तुतिमाला ऊपर बताए गए दृष्टिकोण तक पहुँचने के लिए आवश्यक यात्रा की दूरी बढ़ाती है, वहीं ये हमें यह बताकर आशा भी बँधाती है कि हमें जाना कहाँ है तथा इसके लिए कौन-से कदम उठाने चाहिए।

हम यह संक्षेप में बताएँगे कि हमारे सुझाए हुए दृष्टिकोण को प्राप्त करने के लिए हमारे अनुसार की जाने वाली क्रियाओं के मुख्य निर्देश क्या होंगे। हम उन्हें पुनः चार मुख्य प्रसंगों में विभक्त करेंगे।

1. गणित शिक्षा का फोकस 'संकीर्ण' लक्ष्यों से हटाकर 'ऊँचे' लक्ष्यों की तरफ़ स्थानांतरित करना।
2. प्रत्येक विद्यार्थी को सफलता के भाव के साथ जोड़ना तथा साथ ही साथ उदीयमान गणितज्ञों के सामने संकल्पनात्मक चुनौतियाँ प्रदान करना।
3. आकलन पद्धतियों को बदलना जिससे विद्यार्थी के प्रक्रियात्मक ज्ञान के स्थान पर गणितीकरण योग्यताओं की परख हो।
4. विविध गणितीय संसाधनों से शिक्षकों का संवर्द्धन करना।

यहाँ पर कुछ विस्तार की आवश्यकता है। ऊपर जिन 'ऊँचे' लक्ष्यों की ओर स्थानांतरित करने का समर्थन किया गया है वह किस तरह बच्चों में गणित का भय दूर कर सकेगा? क्या वास्तव में यह संभव है कि हम एक ही साथ चुप्पी साधे बहुसंख्यक विद्यार्थियों तथा अभिप्रेरित अल्पसंख्यक विधार्थियों दोनों को संबोधित करें? हम ज्ञान के बजाय प्रक्रिया को किस तरह जाँच परख सकते हैं? हम नीचे इन मुद्दों पर संक्षिप्त में चर्चा करेंगे।

5.1 ऊँचे लक्ष्यों की ओर

संकीर्ण लक्ष्यों से ऊँचे लक्ष्यों की ओर जिस बदलाव की हम वकालत कर रहे हैं, उसे बेहतर तरीके से संक्षेप में इस प्रकार कहा जा सकता है कि यह बदलाव गणितीय विषयवस्तु से गणितीय अधिगम वातावरण की ओर है।

हमारे स्कूलों में पढ़ाए जाने वाले गणित के विषय क्षेत्र एक मजबूत नींव प्रदान करते हैं। इस बात पर विवाद हो सकता है कि किस स्तर पर क्या पढ़ाया जाता है और किस विशिष्ट प्रसंग पर विस्तार का स्तर क्या है लेकिन विषय क्षेत्र में (अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति, क्षेत्रमिति, त्रिकोणमिति, आँकड़ों का विश्लेषण) सभी आवश्यक घटक शामिल हैं, इस पर एक व्यापक सहमति है।

हमारे वर्तमान पाठ्यचर्या और शिक्षण-शास्त्र की आलोचना का मुख्य कारण गणितीय प्रक्रियाओं के संदर्भ में उसका असफल होना कहा जा सकता है। हमारा आशय यहाँ प्रक्रियाओं की पूरी श्रेणी से है: औपचारिक समस्या समाधान, स्वतः शोधन विधि (यूज ऑफ़ ह्यूरिस्टिक्स) का प्रयोग, अनुमान, और सन्निकटन, इष्तमीकरण (ऑप्टिमाइजेशन), प्रतिरूपों का उपयोग, दृश्यीकरण, निरूपण, तार्किक क्षमता और उपपत्ति (प्रमाण), संबंध स्थापित करना, तथा गणितीय संप्रेषण। इन प्रक्रियाओं को महत्त्व देने का मतलब कई चीजों में फ़र्क समझना है मसलन कि गणित करना और गणित छोड़ना, चिंतन का गणितीकरण और सूत्रों को कंठस्थ करना, सतही गणित और महत्त्वपूर्ण गणित, संकीर्ण लक्ष्यों के लिए काम करते हुए ऊँचे लक्ष्यों की ओर जाना।

स्कूली गणित में निश्चित रूप से अधिक ज़ोर तथ्यात्मक ज्ञान, प्रक्रियात्मक प्रवाह और संकल्पनात्मक समझ पर दिए जाने की ज़रूरत है। संकल्पनात्मक चीजों के इस्तेमाल से अनुभव तथा पूर्वज्ञान के जरिए नए ज्ञान का निर्माण होता है। लेकिन प्रक्रिया को तथ्यात्मक समझ व अनुभव पर आधारित ज्ञान के निर्माण की तुलना में अधिक महत्त्व दिया जाता है। इसे बच्चों में गणित के प्रति भय के मुख्य कारण के रूप में देखा जा सकता है।

वहीं दूसरी ओर समस्या समाधान, गतिविधियों और ऊपर बताई गई बातों से संबंधित विधियों पर ज़ोर देने से

अधिगम वातावरण का निर्माण होता है जो बच्चों की सहभागिता बढ़ाता है, उन्हें लगाए रखता है और उनमें सफलता का भाव पैदा करता है। इस तरह से हमारी कक्षाओं का रूपांतरण और पाठ्यक्रम का ऐसा डिज़ाइन जो ऐसे रूपांतरण के अनुकूल हो, हमारी सर्वोच्च प्राथमिकता होनी चाहिए।

5.1.1 प्रक्रियाएँ

हम जिन तरह-तरह की प्रक्रियाओं और उनका पाठ्यचर्या में स्थान का जिक्र कर रहे हैं, यहाँ उनकी व्याख्या करना उचित समझते हैं। ये प्रक्रियाएँ विषय-क्षेत्रों को आपस में जोड़ती हैं, लेकिन हम ज़ोर देना चाहेंगे कि वे गणित के लिए बहुत अहम है। इसे इसके विपरीत अर्थों में देखने की ज़रूरत है जिसमें गणित को सटीक लेकिन गूढ़ ज्ञान के रूप में देखा जाता है।

औपचारिक समस्या समाधान, कम से कम स्कूलों में केवल गणित के क्षेत्र में ही मौजूद है। परंतु भौतिक शास्त्र के पाठों के लिए माध्यमिक स्तर व बाद के स्तरों पर, गणित के बाहर ऐसी कोई स्थितियाँ नहीं हैं जहाँ बच्चे अपने को समस्या समाधान से जोड़ सकें। ऐसा होने के बावजूद यह सच है कि गणित एक महत्त्वपूर्ण 'जीवन कौशल' है जो स्कूल सिखा सकता है, गणित शिक्षा को इस बात के लिए और अधिक सजग होना चाहिए कि कौन-सी विधियाँ दी जा रही हैं। समस्या समाधान में केवल वही अभ्यास करना सम्मिलित है जो पाठ्यवस्तु की विशिष्ट परिभाषाओं के लिए उदाहरणस्वरूप आते हैं। बदतर, पाठ्यपुस्तक के सवाल विशेष युक्तियों के ज्ञान तक सीमित होते हैं जिनकी उस पाठ के बाहर कोई वैध ता नहीं होती।

दूसरी ओर, कई 'सामान्य तकनीकें' स्कूल के विभिन्न चरणों में पढ़ाई जा सकती हैं। तकनीकें जैसे अमूर्तन, सांख्यिकीकरण, अनुरूपता, प्रकरण विश्लेषण, सरल परिस्थितियों में रूपांतरण, यहाँ तक कि अनुमान और सत्यापन, कई समस्याओं के संदर्भ में उपयोगी हैं। इसके अतिरिक्त जब बच्चे विभिन्न प्रकार के उपगमन (समय के साथ) सीखते हैं तो वे साधन समृद्ध होते हैं तथा वे यह सीखते हैं कि कौन-सा उपगमन कब उपयुक्त होगा।

यह हमें **ह्यूरिस्टिक** या निश्चित नियमों की ओर ले जाता है। दुर्भाग्यवश गणित को 'शुद्ध' माना गया है जिसमें 'उचित सूत्र' का प्रयोग किया जाता है। किसी त्रिभुज के गुणधर्म का पता लगाने के लिए अकसर यह उपयोगी होता है कि पहले हम उस विशेष स्थिति का पता कर लें जिसमें अमुक त्रिभुज समकोण त्रिभुज है, फिर सामान्य मामले को देखें। ऐसी स्वत: शोध प्रणाली हमेशा कार्य नहीं करती लेकिन जब ये कार्य करती हैं तो कई अन्य सवालों का भी जवाब दे सकती हैं। जब हम गणित का उपयोग विज्ञान में करते हैं तो ऐसी स्वत: शोध प्रणाली के उदाहरण प्रचुर मात्रा में मिलते हैं। ज्यादातर वैज्ञानिक, अभियंता और गणितज्ञ स्वत: शोध प्रणाली का बहुत अधिक उपयोग करते हैं-यह एक एसा तथ्य है जो हमारी स्कूली पाठ्यपुस्तकों द्वारा सावधानी से छिपाया गया है।

राशियों के अनुमान और हलों के सन्निकटन को वैज्ञानिक आवश्यक कौशल मानते हैं जब सटीक हल मौजूद न हों। भौतिकविद फ़र्मी दैनिक जीवन पर आधारित अनुमान सवालों के निर्माण को प्रदर्शित करने के लिए विख्यात थे। वह यह भी बताते थे कि इन सवालों ने किस तरह से नाभिकीय भौतिकी में उनकी मदद की। वस्तुत: जब एक किसान किसी विशेष फसल से प्राप्त होने वाली उपज का अनुमान लगाता है तब अनुमान और सन्निकटन की विचारणीय विधियाँ उपयोग में लाई जाती हैं। स्कूली गणित ऐसे उपयोगी कौशलों के विकास व संवर्द्धन में एक सार्थक भूमिका अदा कर सकता है। लेकिन यह अफसोस की बात है कि यह करीब-करीब पूरी तरह से उपेक्षित है।

स्कूलों में इष्तमीकरण (ऑप्टीमाइजेशन) को एक कौशल के रूप में कभी भी नहीं पहचाना गया है। जब हम कुछ सामानों का एक सेट किसी तय रकम से कम में खरीदना चाहते हैं तो हम इष्टतमीकरण करते हैं। 100रु. में अ और ब, या स, द और य विभिन्न परिमाणों में खरीद सकते हैं, और हम निर्णय लेते हैं। दो विभिन्न रास्ते हमें एक ही स्थान तक ले जा सकते हैं और प्रत्येक

के विभिन्न लाभ या हानियाँ हैं। अधिकांश इष्टतमीकरण समस्याओं के लिए सटीक हल होना कठिन है, परन्तु **उपलब्ध सूचना के आधार पर बुद्धिमतापूर्ण चयन**, एक गणितीय कौशल है जो सिखाया जा सकता है। प्राय: ज़रूरी आंकिक या ज्यामितीय सुविधा उच्च प्राथमिक स्तर पर उपलब्ध होती है। ऐसी स्थितियाँ तथा योग्यताएँ विकसित करने से स्कूली गणित आनंदप्रद बन सकती है तथा इसे प्रत्यक्ष रूप से उपयोगी बनाया जा सकता है।

दृश्यीकरण और **निरूपण** पुन: ऐसे कौशल हैं जो गणित के पाठ्यक्रम के बाहर हैं और इसलिए गणित में इसे जितना अभी तक विकसित किया जा चुका है उससे और अधिक विकसित करने की आवश्यकता है। संख्याओं, आकारों व रूपों का उपयोग कर प्रतिमानीकरण करना गणित का सबसे अच्छा उपयोग है। ऐसे निरूपण में काल्पनिकता और तार्किक क्षमता होती है जिनसे आवश्यक बातों को स्पष्ट करने व अप्रासंगिक जानकारियों को दूर करने में सहायता मिलती है। खेद है कि निरूपण वहीं पढ़ाकर समाप्त कर दिए जाते हैं। उदाहरण के लिए समीकरण पढ़ाए जाते हैं, परंतु बल और त्वरण के बीच संबंध स्थापित करने में समीकरण का उपयोग कैसे किया जाए यह परीक्षण नहीं किया जाता। हमें उदाहरणों की आवश्यकता है जो बहुत से निरूपण प्रदर्शित कर सकें, जिससे सापेक्ष लाभ समझे जा सकें। उदाहरण के लिए, एक भिन्न को p/q के रूप में लिखा जा सकता है परंतु इसे संख्या रेखा (नंबर लाइन) पर एक बिंदु के रूप में भी देखा जा सकता है। दोनों निरूपण उपयोगी हैं और विभिन्न संदर्भों में उचित है। यह भिन्नों के बारे में सीखना, भिन्नों के अंकगणित से कहीं अधिक उपयोगी हैं।

यह हमें गणित के अंदर, गणित में तथा अध्ययन के दूसरे विषयों के मध्य संबंध स्थापित करने की आवश्यकता की ओर भी ले जाता है। बच्चे आँकड़ों के मध्य क्रियात्मक संबंधों के ग्राफ़ बनाना सीखते हैं परंतु भौतिक शास्त्र और रसायन शास्त्र में समीकरण पढ़ते समय ऐसे ग्राफ के विषय में सोचने में असफल रहते हैं। बीजगणित सारगर्भित प्रतिस्थापनीय विज्ञान कथनों को रेखांकित करने के लिए एक भाषा प्रदान करती है और कई बच्चों के लिए अभिप्रेरण का कार्य करती है। यूजीन विगनर ने एक बार विज्ञान में गणित की अतार्किक प्रभावकारिता के बारे में कहा था। बच्चों को यह तथ्य समझने की आवश्यकता है कि गणित विज्ञान में एक प्रभावकारी उपकरण है।

गणित में **व्यवस्थित तर्कण** को बहुत ज़्यादा रेखांकित नहीं किया जा सकता। यह गणितज्ञों की सौंदर्यशास्त्र और लालित्य की धारणाओं से विशिष्ट रूप से बँधा है। गणित में उपपत्ति (प्रूफ़) महत्त्वपूर्ण है परंतु निगमन से उपपत्ति की तुलना करना, जो कि स्कूलों में होती है, धारणा के साथ अन्याय है। कभी-कभी एक चित्र किसी उपपत्ति के लिए पर्याप्त होता है, एक रचना किसी दावे को मजबूती से सिद्ध करती है। उपपत्ति को एक प्रक्रिया के रूप में लेने की सामाजिक धारणा जो संशयपूर्ण विरोधी को सहमत करती है, वह गणित के अभ्यास में महत्त्वपूर्ण है। अत: स्कूली गणित को एक व्यवस्थित तरीके से तर्क-वितर्क के रूप में उपपत्ति को बढ़ावा देना चाहिए। तर्क विकसित करना, तर्कों का मूल्यांकन करना, निराधार कल्पनाओं को बनाना और उनकी जाँच करना और यह समझना कि तर्कण की कई विधियाँ हैं, यह उद्देश्य होना चाहिए।

प्रक्रिया का एक अन्य महत्त्वपूर्ण तत्व है **गणितीय संप्रेषण**। संक्षिप्त व सुस्पष्ट भाषा का प्रयोग और कठिन सूत्रीकरण गणितीय व्यवहार की महत्त्वपूर्ण विशेषताएँ हैं जो कि गणित शिक्षा की सहायता से प्रदान किए जाने वाले मूल्य हैं। गणित में विशिष्ट शब्दावली का उपयोग सुविचारित, सजग और विशिष्ट शैली में होता है। जैसे-जैसे बच्चे बड़े होते हैं, उन्हें ऐसी परिपाटी की सार्थकता की प्रशंसा व उसका उपयोग करना पढ़ाया जाना चाहिए। उदाहरणार्थ इसका अर्थ है कि किसी समीकरण के निर्माण को उतना ही महत्त्व मिलना चाहिए जितना कि हम उसके हल करने को देते हैं।

इन कौशलों और प्रक्रियाओं की चर्चा करते हुए हमने विभिन्न प्रकार के तरीकों, विधियों, हलों को अपनाने का सुझाव बार-बार दिया है। यह हमें स्कूली गणित को एक सही उत्तर, जो केवल एक पढ़ाई गई विधि से प्राप्त होता है, की निरंकुशता से स्वतंत्र कराने के अर्थ में महत्त्वपूर्ण लगता है। जब कई तरीके उपलब्ध हों तो

हम उनमें तुलना कर सकते हैं, यह फ़ैसला कर सकते हैं कि कौन-सी विधि कब उपयुक्त होगी और इस प्रक्रिया में अंतर्दृष्टि प्राप्त कर सकते हैं। और ऐसी बहुलता अधिकांश गणितीय संदर्भों में उपलब्ध है जो सभी विद्यालयों में प्राथमिक स्तर से प्रारंभ होती है। उदाहरण के लिए, जब हम 102 को 8 से भाग देना चाहते हैं तो यह हम लंबी भाग विधि से कर सकते हैं या पहले 10 से प्रयास करें, बाद में 15 से और यह निर्णय करें कि उत्तर इन दोनों के बीच में है और इस अंतर को कम करने के लिए कार्य करें।

यह जानना आवश्यक है कि गणितीय प्रतिस्पर्धा सामाजिक स्थितियों और उन गतिविधियों जिनसे अधिगम कराया जाता है, में स्थित होती है और आकार लेती है। अतः स्कूली गणित का बच्चों के सामाजिक वातावरण से निकट का संबंध होना चाहिए जहाँ वे दैनिक जीवन के भाग के रूप में गणितीय गतिविधियों में संलग्न रहते हैं। खुले हुए प्रश्न (ओपन एंडेड प्रॉब्लम्स), महत्त्वपूर्ण हैं जिसमें अपने तरीके शामिल हों, और केवल एक अंतिम, अद्वितीय, सही उत्तर पर पहुँचने पर आधारित न हो, क्योंकि वैधता जाँच के बाह्य स्रोत (शिक्षक, पाठ्यपुस्तकें, गाइड पुस्तकें) गणितीय दावों के लिए आदतन ढूँढ़े हुए नहीं हैं। एक ही तरीका सभी शिक्षार्थियों के लिए नुकसानदायक होता है परन्तु प्रायः लड़कियों के लिए खास तौर पर नुकसानदायक सिद्ध होता है।

5.1.2 गणित जो लोग इस्तेमाल करते हैं

ऊपर चर्चा की गई विधियों पर जोर देने से बच्चे आम जीवन में गणित की प्रासंगिकता को समझने योग्य बनते हैं। भारतीय गाँवों में यह आम तौर पर देखा जाता है कि जो लोग औपचारिक रूप से पढ़े-लिखे नहीं हैं वे मानसिक गणित की कई विधियों का उपयोग करते हैं। इन्हें लोक दशमलव प्रणाली कहा जा सकता है। यह केवल मानसिक अंक गणनाओं के लिए ही नहीं वरन् मापन, अनुमान, आकारों और सौंदर्यशास्त्र की समझ के लिए होता है। इन विधियों की समृद्धि की समझ से खुद बच्चे का गणित के प्रति दृष्टिकोण समृद्ध हो सकता है। कई बच्चे ऐसी परिस्थितियों में डूबे होते हैं जहाँ वे इन विधियों को देख व सीख सकते हैं और ऐसे ज्ञान को औपचारिक रूप से सीखे गए गणित से जोड़ सकते हैं, यह उनके लिए प्रेरणादायक और अतिरिक्त अभिप्रेरक हो सकता है।

उदाहरण के लिए, दक्षिण भारत में **कोलम्स** (सफ़ेद चूर्ण का उपयोग कर फर्श पर बनाई गई जटिल आकृतियाँ, जो उत्तर भारत की रंगोली के समान होती हैं, परंतु सामान्यतया बिना रंगों की होती हैं।) घर के सामने देखे जा सकते हैं। हर दिन एक नया कोलम बनाया जाता है और विभिन्न प्रकार के कोलमों का उपयोग किया जाता है। परंपरागत रूप से कोलम स्त्रियाँ बनाती हैं और कई तो प्रतिस्पर्धाओं में शामिल भी होती हैं। इन कोलमों का व्याकरण, वे जिन बंद वक्रों के वर्गों का उपयोग करती हैं, सममितियाँ जिन्हें वे इस्तेमाल करती हैं-ये वे बातें हैं जिन्हें स्कूलों में गणित शिक्षा में चर्चा में लाया जाना चाहिए और जिससे विद्यार्थियों को बहुत लाभ होगा। इसी प्रकार कला, वास्तुशास्त्र और संगीत भी कई जटिल उदाहरण प्रस्तुत करते हैं जो बच्चों को गणित के सांस्कृतिक आधारों को समझने में मददगार हो सकते हैं।

5.1.3 तकनीकी का उपयोग

तकनीकी गणितीय खोज में बहुत अधिक सहायता कर सकती है और इन साधनों का बुद्धिमतापूर्वक उपयोग कर विद्यार्थियों को व्यस्त रखा जा सकता है। कैलकुलेटर परंपरागत रूप से अंकगणितीय संक्रियाओं में सहायक होते हैं। वहीं यह भी सत्य है कि कैलकुलेटर का शिक्षाशास्त्रीय महत्त्व है। वास्तव में यदि कोई यह प्रश्न पूछे कि क्या परीक्षाओं में कैलकुलेटर ले जाने की अनुमति होनी चाहिए तो इसका उत्तर यह है कि परीक्षकों द्वारा ऐसे प्रश्न पूछना अनावश्यक है जिसमें कैलकुलेटर की आवश्यकता हो। इसके विपरीत निर्भय वातावरण में बच्चे कैलकुलेटर का उपयोग बीजगणितीय क्रियाओं की पुनरावृत्ति का अध्ययन करने में कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, एक बड़े मनचाहे अंक को लेकर बार-बार उसका वर्गमूल निकाला जाए यह देखने के लिए कि

श्रृंखला 1 तक कितनी जल्दी पहुँचती है, तो यह रोचक होगा। यहाँ तक कि 'अस्त-व्यस्तता' (कैऑस) जैसी घटनाएँ भी इन पुनरुक्तियों से आसानी से समझी जा सकती हैं।

यदि साधारण कैलकुलेटर में इतनी संभावनाएँ हैं तो ग्राफिंग कैलकुलेटर और कंप्यूटरों के सामर्थ्य का गणितीय अन्वेषण में बहुत अधिक उपयोग हो सकता है। हालाँकि ये थोड़े महँगे हैं और हमारे देश में जहाँ बच्चों के एक बड़े भाग के पास एक नोटबुक से अधिक खरीदने की सामर्थ्य नहीं है, इसका प्रयोग विलासिता युक्त होगा। यहीं पर सरकार द्वारा उचित वैकल्पिक कम दर वाली तकनीकी उपलब्ध कराना उचित होगा। इस दिशा में शोध, स्कूली शिक्षा के लिए अत्यंत लाभकारी होगा।

यह समझना आवश्यक है कि गणित शिक्षा में कई तरह की प्रौद्योगिकी का उपयोग किया जाता है और कैलकुलेटर या कंप्यूटर इसका महज एक छोटा-सा भाग है। नोटबुक और श्यामपट्ट तो दूसरी चीज हैं, ग्राफ़ पेपर, जियो बोर्ड, गिनतारा (एबेकस), जयामिति बॉक्स आदि का उपयोग बहुत अहम है। डिजाइन तथा ऐसी सामग्रियों के उपयोग में नवाचार को प्रोत्साहन दिया जाना चाहिए जिससे स्कूली गणित शिक्षा आनंदप्रद और अर्थपूर्ण बन सके।

5.2 सभी के लिए गणित

एक व्यवस्थागत लक्ष्य जिसे रेखांकित करने तथा समाहित करने की जरूरत है, वह है सार्वत्रिक समावेश। उसका अर्थ है कि हम यह कथन स्वीकारें कि गणित शिक्षण तथा उसके उपचारात्मक तौर तरीकों में सामाजिक विभेदीकरण है। उदाहरणार्थ जेंडर-आधारित अभिवृत्तियाँ, जो लड़कियों के लिए गणित को ग़ैर महत्त्वपूर्ण समझती हैं, इन्हें विद्यालय में चुनौती दिए जाने की ज़रूरत है। भारत में, जाति आधारित भेदभाव भी इस सम्बन्ध में होता है तथा इस तरह की प्रवृत्तियों को कोई तंत्र चूक से भी सहन नहीं कर सकता।

समावेश एक आधारभूत सिद्धांत है। वे बच्चे, जिनकी आवश्यकताएँ विशिष्ट हैं, विशेषकर वे बच्चे जो शारीरिक या मानसिक रूप से असमर्थ हैं, उन्हें भी गणित सीखने का उतना ही अधिकार है जितना कि किसी अन्य बच्चे को। उनकी आवश्यकताओं (शिक्षा-शास्त्र, अधिगम सामग्री इत्यादी के संदर्भ में) पर गंभीरता से ध्यान दिए जाने की ज़रूरत है। गणित की संकल्पनात्मक दुनिया इन बच्चों के लिए बहुत खुशियाँ ला सकती है। इस बारे में यह हमारी जिम्मेदारी है कि हम उन्हें ऐसी शिक्षा से वंचित न होने दे।

गणित को सभी के लिए गंभीरता से लेने का एक महत्त्वपूर्ण निहितार्थ यह है कि पाठ्यपुस्तकों में उपयोग की भाषा भी बच्चों के भाषा प्रयोग के प्रति संवेदनशील हो। यह प्राथमिक शिक्षा के लिए नितांत ज़रूरी है तथा यह केवल पाठ्यपुस्तकों की बहुलता से ही हासिल किया जा सकता है।

कक्षाओं में बच्चों का एक बड़ा भाग गणितीय प्रक्रियाओं में सक्रिय रूप से भाग नहीं ले पाता। इस बड़े समूह को कक्षाओं में जुड़ाव के लिए सीखने के वातावरण की ओर बदलाव पर जोर दिया जा रहा है लेकिन इसका आशय किसी भी तरह से स्तर या मानकों में गिरावट, या उससे समझौते करने से नहीं है। हम यह सुझाव नहीं दे रहे हैं कि गणित की कक्षा में एक बड़े हिस्से को ऊबाने के स्थान पर पहले से ही अभिप्रेरित अल्पभाग को ऊबाया जाए। दूसरी ओर, एक ऐसा केस बनाया जा सकता है कि इस तरह की खुली समस्या परिस्थितियाँ निर्मित की जाएँ जो चुनौतियों में ज्यादा उतार-चढ़ाव दे सकें और इन थोड़े से बच्चों के लिए भी बहुत कुछ प्रदान करें।

यह व्यापक तौर पर स्वीकार किया जाता है कि गणितीय प्रतिभा की पहचान शुरू में ही की जा सकती है जो एक तरह से अन्य ज़्यादा जटिल विषयों जैसे साहित्य और इतिहास में दृष्टिगोचर नहीं होती 'अर्थात्' प्रतिभाशाली बच्चों के लिए चुनौतिपूर्ण कार्य देना सम्भव है। कार्यों के इतिहास की अनदेखी की जा सकती है, आवश्यक मशीनरी न्यूनतम हो सकती है, तथा जिस तरह से ऐसी युवा प्रतिभाएँ अपनी अंतर्दृष्टि अभिव्यक्त करती हैं, उन्हें गणितीय जाँच के लिए विस्तार देने की ज़रूरत नहीं है।

यह सब कहने का आशय यह है कि सभी बच्चों के लिए उनकी रुचि के अनुसार चुनौतीपूर्ण सवाल देना

निश्चय ही सम्भव है। लेकिन यह व्यवस्थागत प्रक्रियाओं की माँग करती है, खास करके पाठ्यपुस्तकों में। भारत में केवल कुछ ही बच्चे हैं जिनकी पहुँच गणित की पाठ्यपुस्तकों के बाहर की गणितीय सामग्री तक है। इसलिए पाठ्यपुस्तकों की संरचना तैयार करते समय ऐसी विविधतापूर्ण विषय-वस्तु प्रदान करने की ज़रूरत है।

इसके अलावा ऐसे प्रतिभावान बच्चों की पहचान तथा उनके पोषण हेतु भी हमें कई तरह के तरीकों पर विचार करने की ज़रूरत है, खास तौर पर ग्रामीण अँचलों में, स्कूली घंटों के बाहर मदद के रूप में। प्रत्येक जनपद में ऐसे कुछ केंद्रों की ज़रूरत है जहाँ तक बच्चों की पहुँच तथा जहाँ समय-समय पर ऐसी गतिविधियाँ कराई जाती हों। ऐसी प्रतिभाओं का आपस में नेटवर्क बनाना भी उन्हें समृद्ध बनाने का एक अन्य तरीका है।

5.2.1 आकलन

चूँकि स्कूली शिक्षा के सभी वर्षों में गणित एक अनिवार्य विषय है, सभी विस्तृत मूल्यांकनों में सार्वत्रीकरण की चिंताओं का ध्यान रखा जाना चाहिए। चूँकि कक्षा 10 की बोर्ड परीक्षा का प्रमाण पत्र राज्य द्वारा दिया जाता है अत: इस परीक्षा में प्रमाणित असफलता के नतीज़ों पर गंभीरता से विचार करने की ज़रूरत है। शिक्षा परिदृश्य की वास्तविकताओं के मद्देनजर यह एक सत्य है कि बहुतों के लिए कक्षा 10 एक टर्मिनल बिंदु है। ऐसे में इन बच्चों के मूल्यांकन में उसी एकल मानक का प्रयोग, तथा हायर सेकेंडरी के लिए योग्यता का पैमाना तय करने के लिए इसी मानक का प्रयोग एक ऐसी बात है जिसका समर्थन नहीं किया जा सकता। ऐसे में जब सभी बच्चे 10 वर्ष की स्कूली पढ़ाई के प्रति कानूनी तौर पर बँधे हैं, तो राज्य द्वारा जारी 10वीं उत्तीर्ण के प्रमाण-पत्र को एक बुनियादी ज़रूरत के रूप में देखा जाना चाहिए न कि क्षमता तथा कुशलता के प्रमाण-पत्र के रूप में।

इन बातों को ध्यान में रखते हुए तथा गणित में उच्च असफलता की दर के मद्देनजर हमारा सुझाव है कि बोर्ड परीक्षा का स्वरूप और उसकी संरचना फिर से तय की जाए। यह सुनिश्चित किया जाना चाहिए कि हर नागरिक उत्तीर्ण हो तथा वह राज्य के प्रमाण-पत्र के योग्य बने। परीक्षा की लगभग आधी विषय-वस्तु को इसके अनुरूप बनाया जाना चाहिए।

यद्यपि बाकी की परीक्षा बच्चों के लिए वर्तमान के मुकाबले ज़्यादा चुनौतीपूर्ण होनी चाहिए। इसमें याददाश्त के बजाय सामर्थ्य तथा विशेषज्ञता पर जोर दिया जाना चाहिए। बोर्ड परीक्षाओं में तीव्र अभिकलनी योग्यता की जगह संकल्पनात्मक समझ का मूल्यांकन करने से पूरी प्रणाली के लिए एक संदेश जाएगा तथा समय के साथ इससे शिक्षा-शास्त्र में परिवर्तन भी होगा।

इन टिप्पणियों का संबंध स्कूल स्तर पर सभी तरह के समेकित इम्तिहानों के लिए भी है। एक विशिष्ट परीक्षण पैटर्न की जगह आकलन के तमाम तरीकों को प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। इसके लिए बहुत सारे अनुसंधान, तथा तमाम तरह के आकलन नमूने तैयार करने और उन्हें लोगों तक पहुँचने की ज़रूरत है।

5.3 शिक्षकों का समर्थन

व्यवस्थागत परिवर्तन जिनकी हमने वकालत की है, उसके लिए शिक्षकों की तरफ से पर्याप्त समय ऊर्जा और मदद की ज़रूरत है। इस परिवर्तन को हासिल करने के लिए ऐसे पेशेवर विकास की केंद्रीय भूमिका है जिसमें शिक्षकों के विश्वास, अभिवृत्तियाँ, ज्ञान और अभ्यासों पर प्रभाव पड़े। इस अध्याय में दी गई दृष्टि को वास्तविकता में बदलने के लिए यह आवश्यक है कि पेशेवर विकास खास तौर पर गणित पर केंद्रित हो। कक्षा में आवश्यक सामग्री की समझ, शिक्षा की तकनीकें, तथा गणित शिक्षा के महत्त्वपूर्ण मुद्दे, सामान्य शिक्षक-प्रशिक्षण से नहीं प्राप्त होते।

ऐसी कई क्रियाविधियाँ हैं जिन्हें बेहतर शिक्षक सहायता और पेशेवर विकास के लिए सुनिश्चित करने के लिए प्रयोग में लाए जाने की आवश्यकता है। परंतु महत्त्वपूर्ण और मूल आवश्यकता है बड़ी मात्रा में संसाधन सामग्री की उपलब्धता जिन तक शिक्षक की आसानी से पहुँच हो। इसके अलावा शिक्षकों की आपसी नेटवर्किंग अहम है जिससे विशेषज्ञता और अनुभवों को बाँटा जा

सके। साथ ही संसाधन शिक्षकों की पहचान और उनका संपोषण इस प्रक्रिया को मदद कर सकता है। संसाधन केंद्र के रूप में क्षेत्रीय गणित पुस्तकालयों की स्थापना की जा सकती है।

चिंता का एक महत्त्वपूर्ण विषय यह है कि खुद शिक्षक गणित के बारे में क्या सोचता है। यानी गणित के बारे में उसकी अपनी संकल्पना क्या है तथा गणित के लक्ष्यों के घटक क्या हैं, इस बारे में उसकी राय क्या है। हमने ऊपर जिन बातों को रेखांकित किया है, ज़्यादातर गणित शिक्षकों की नज़र में अहम नहीं हैं। उसकी वज़ह है उन्हे पढ़ाए गए तरीके, तथा बाद में इस प्रक्रिया पर प्रशिक्षण की कमी भी एक वजह हो सकती हैं।

सामग्रियों की विस्तृत श्रृंखला जो शिक्षक की विषय के प्रति समझ को समृद्ध करे, विषय के तथ्यात्मक और ऐतिहासिक विकास की अंतर्दृष्टि प्रदान करती है और कक्षाओं में नवाचार के लिए उन्हें मदद करती है। यह शिक्षकों की सहायता करने का सबसे बेहतर तरीका है। इसके लिए कॉलेज शिक्षकों और शोध गणितज्ञों से संप्रेषण चैनल प्रदान करने से बहुत अधिक सहायता मिलेगी। जब शिक्षक आपस में संपर्क करेंगे और विश्वविद्यालय शिक्षकों से जुड़ेंगे तो उनकी शैक्षिक योग्यता बहुत समृद्ध होगी।

6. पाठ्यचर्या विकल्प

पाठ्यचर्या के विकल्पों की मौजूदगी की स्वीकार्यता शिक्षा के संस्थानीकरण में एक अहम कदम है। अत: जब हम विषयवस्तु से अधिक महत्त्व अधिगम वातावरण को देने की बात करते हैं तो हम मानदंड दे रहे होते हैं जिससे पाठ्यचर्या निर्माता विकल्पों के चुनाव को निश्चित करें। उदाहरण के लिए, दृश्यीकरण और ज़्यामितीय तर्क महत्त्वपूर्ण प्रक्रियाएँ हैं और इसमें बीजगणित पढ़ाने के निहितार्थ हैं। वे विद्यार्थी जो हड़बड़ी में बिना आगा-पीछा सोचे तथा ज्यामितीय तसवीरों को बिना जाने समझे समीकरण हल करते हैं, उनके बारे में यह नहीं कहा जा सकता कि वे समझ चुके हैं। अगर इसका मतलब ज्यामितीय तर्क के लिए ज़्यादा कवरेज है (पाठ्यपुस्तक में ज़्यादा अध्याय तथा पृष्ठों के रूप में) तो इसे सुनिश्चित किया जाना चाहिए और अगर इस तरह का विस्तार दूसरी सामग्रियों (ज़्यादातर अभिकलनी) को कम करके ही हो सकता है तो ऐसा करना जायज़ होगा।

नीचे चरणवार सामग्री की चर्चा करते समय हम पाठ्यक्रम निर्माता के लिए ऐसे कई अंतर्वेशन/बहिष्करण का प्रस्ताव करते हैं। हम पुन: बल दे रहे हैं कि यहाँ विषय-वस्तु के स्तर को कम करने का सुझाव नहीं दिया जा रहा है बल्कि विविध प्रक्रियाओं को महत्त्व देने का सुझाव दिया जा रहा है। इसके अतिरिक्त हम कुछ चीज़ों को टाल देने के सिद्धांत का सुझाव दे रहे हैं: सामान्य रूप से यदि कोई विषय बाद में अधिक अच्छे अभिप्रेरण तथा अनुप्रयोगों के साथ प्रस्तुत की जा सकती है बजाय अभी बिना तकनीकी तैयारी और जरूरी अभिप्रेरण के, तो उसके लिए इंतजार करना चाहिए। ऐसे विचार माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तरों पर बहुत महत्त्वपूर्ण हैं जहाँ चौड़ाई और गहराई के बीच सजग चुनाव की ज़रूरत है। यहाँ विलियम थर्सटन का कथन उपयुक्त हैं :

> *गणित शिक्षण के विस्तृत और दीर्घकालिक उद्देश्यों की बेहतर प्राप्ति संभव होती अगर गणित के ऊँचे/आकार पर कम ज़ोर दिया जाता। ऐसा मानक क्रम से दूर हटकर ज़्यादा विविध पाठ्यचर्या की ओर बढ़कर किया जा सकता था जिसमें ऐसे विषय ज़्यादा होते जो आधार से शुरू होते हैं। इस दिशा में कुछ प्रवृत्तियाँ देखी गई हैं जैसे परिमित गणित तथा प्रायिकता के पाठ्यक्रम, लेकिन अभी बहुत कुछ करने की गुंजाइश है।*[17]

6.1 प्राथमिक स्तर

प्राथमिक स्तर के किसी भी पाठ्यक्रम में मूर्त से अमूर्त की ओर बढ़ा जाना चाहिए तथा बाद में गणित में अमूर्तन का महत्त्व समाविष्ट होना चाहिए। निचली कक्षाओं में यह महत्त्वपूर्ण है कि पहले चरण में मूर्त वस्तुओं पर आधारित गतिविधियाँ दी जाएँ जिससे बच्चा अपने दैनिक जीवन की तार्किक क्रियाओं व गणितीय चिंतन के बीच संबंधों को समझने लायक बन सके।

अंकों से जुड़े गणितीय खेल, पहेलियाँ तथा कथाएँ बच्चों को इन संबंधों को बनाने में मदद करती हैं और उनकी रोज़मर्रा की समझ का निर्माण करती हैं। खेल–आम दिनचर्या वाले खेल न हों – बच्चों को अनुपदेशात्मक की फीड बैक देने वाले हों जिसमें शिक्षण का बहुत कम हस्तक्षेप हो।[18] ये अनुमान/पूर्वज्ञान, योजना तथा रणनीति तैयार करने को बढ़ावा देते हैं।

6.1.1 गणित केवल अंकगणित नहीं है

अंकों व अंक संक्रियाओं की बातें करते हुए गणित के अंकहीन क्षेत्रों को भी उचित स्थान दिया जाना चाहिए। इसमें आकार, दिक् संबंधी समझ, पैटर्न, मापन तथा आँकड़ों की हैंडलिंग शामिल हैं। उच्च कक्षाओं में ज़्यामिति की प्रस्तावना के रूप में केवल आकारों और उनके गुणों के साथ कार्य करना ही पर्याप्त नहीं है। यह भी महत्त्वपूर्ण है कि संबंधित शब्दों की शब्दावली तैयार की जाए जो बच्चे की दिक्स्थान की समझ बढ़ा सके। पैटर्न की पहचान गणित के लिए अहम है। पुनरावृत्ति करने वाले साधारण आकार वाले पैटर्नों से शुरू करके बच्चा ज़्यादा जटिल पैटर्न की ओर बढ़ सकता है जिसमें आकार तथा संख्याएँ दोनों शामिल होंगे। यह उस सोचने के तरीके की नींव रखता है जिसे हम बीजगणित कहते हैं। प्राथमिक पाठ्यचर्या जो ऐसी गतिविधियों से समृद्ध होती है, निश्चित रूप से माध्यमिक अवस्थाओं में बीजगणित की ओर प्रस्थान को अपेक्षाकृत सरल बनाती है।[19] आँकड़ों की हैंडलिंग जो उच्च कक्षाओं में सांख्यिकी के लिए आधार निर्मित करता है, स्कूली गणित का एक अन्य उपेक्षित क्षेत्र है, जिसे कक्षा 1 से पढ़ाया जा सकता है।

6.1.2 अंक तथा अंक संक्रियाएँ

बच्चे स्कूल में प्रवेश के समय अंकों तथा साधारण संक्रियाओं के अंतर्ज्ञानीय व सांस्कृतिक विचारों से सुसज्जित होते हैं। बच्चों को खाली पात्र समझने के बजाय इन संबंधों व कड़ियों का उपयोग अंकों के प्रति समझ उत्पन्न करने में किया जाना चाहिए। गणितीय रूप से सोचने के लिए बच्चों का तार्किक होना, व तार्किक नियमों को समझना आवश्यक है परन्तु उन्हें गणितीय तकनीकों जैसे आधार दस की दशमलव प्रणाली के उपयोग में प्रवीणता हासिल करने के लिए धारणाओं को सीखना भी ज़रूरी है। गणना जैसी बुनियादी गतिविधियों तथा अंक पद्धति को समझने में तार्किक समझ की आवश्यकता होती है जिसके लिए बच्चों को समझ तथा अभ्यास की ज़रूरत है, यदि उन्हें इसमें प्रवीणता हासिल करनी है और इसके बाद इनका उपयोग उन्हें विचार प्रक्रिया के लिए व गणितीय समस्याओं को हल करने के उपकरण के रूप में करना है।[20] सीमित राशियों व छोटे अंकों के साथ काम करने से बच्चा ज्ञानात्मक सामर्थ्य पर अतिरिक्त भार से बच जाता है जिसका इस्तेमाल शुरुआती चरण में तार्किक कौशलों में प्रवीणता हासिल करने में किया जा सकता है।

प्राकृत संख्याओं से जुड़ी संक्रियाएँ प्राथमिक गणित के पाठ्यक्रम का एक बड़ा भाग होती हैं। लेकिन इसमें जोड़, घटाव, गुणा के स्टैंडर्ड एल्गोरिथ्म तथा पूर्णांक संख्याओं के भाग पाठ्यक्रम में ज़्यादा स्थान पाते रहे हैं। यह अंकबोध के विकास तथा अनुमान तथा सन्निकटन कौशलों की कीमत पर होता है। इसका परिणाम यह होता है कि जब विद्यार्थियों को शाब्दिक समस्याएँ हल करनी पड़ती हैं तब वे पूछते हैं, मैं जोड़ूँ या घटाऊँ। मैं गुणा करूँ या भाग दूँ। संकल्पनात्मक आधार की कमी बाद की कक्षाओं में बच्चों का पीछा करती रहती है। इससे यह दिशा मिलती है कि संक्रियाओं से प्रसंगानुसार ही परिचित कराया जाना चाहिए। इसके बाद भाषा और प्रतीकात्मक संकेतनों का विकास होना चाहिए और फिर स्टैंडर्ड एल्गोरिथ्म को अंत में आना चाहिए।

6.1.3 भिन्न तथा दशमलव

भिन्न तथा दशमलव मिलकर दूसरे बड़े समस्यागत क्षेत्र की ओर इशारा करते हैं। इस बात के कुछ साक्ष्य हैं कि भिन्न संबंधी संक्रियाएँ प्रारंभ होने के साथ ही संयोगवश गणित के प्रति भय की शुरुआत होती है। इन क्षेत्रों की विषयवस्तु पर सावधानीपूर्वक पुनर्विचार की ज़रूरत है। प्रतिदिन के संदर्भ में जिनमें भिन्नों का उपयोग होता है, और जिनमें उन पर अंकगणितीय संक्रियाएँ करने की

आवश्यकता होती है, मैट्रिक इकाइयों और दशमिक मुद्रा के आने के साथ वे पूरी तरह गायब हो गई हैं। वर्तमान में बच्चों को अनेक आविष्कारी परिस्थितियों से गुजरना होता है जिनमें उन्हें भिन्न पर संक्रियाएँ करनी पड़ती है। इसके अतिरिक्त ये संक्रियाएँ कुछ नियमों का पालन करते हुए करनी पड़ती हैं। जो स्वेच्छा से प्रकट होते हैं (यहाँ तक कि शिक्षक के लिए भी) और उन्हें इन नियमों को याद करना पड़ता है–उस समय जब बच्चा पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाओं के नियमों से जूझ रहा होता है। ऐसे में जबकि गणित की तथ्यात्मक संरचना में भिन्नों के महत्त्व से इनकार नहीं किया जा सकता, उपर्युक्त विचार यह सुझाव देते हैं कि प्राथमिक स्तर पर भिन्नों की संक्रियाओं पर कम जोर दिया जाए।[21]

6.2 उच्चतर प्राथमिक स्तर

गणित आश्चर्यजनक रूप से संपीडनीय है: किसी प्रक्रिया में हो सकता है किसी को अत्यधिक परिश्रम करना पड़े, शायद बहुत सारी विधियाँ अपनानी पड़ें। लेकिन एक बार यह समझ में आ गई, तथा अपनी समग्रता में देख ली गईं, तो फिर यह आसान हो जाती है तथा जब भी ज़रूरत हो, इसे इस्तेमाल कर सकते हैं। अत: इस संपीडन में गणित का जो अंतर्ज्ञान होता है वह इसका एक मज़ेदार पहलू है। उच्चतर प्राथमिक चरण में इसे लाने का जो एक बड़ा लक्ष्य है वह बच्चों को इसी आनंद से परिचित कराना है।

संपीडित रूप में इसका विविध प्रसंगों में अनुप्रयोग है। इस तरह गणित दैनिक जीवन की कई समस्याओं को सुलझा सकती है और उन्हें हल करने के लिए उपकरण प्रदान करती है। वस्तुत: अंकगणित से बीजगणित की ओर संक्रमण चुनौतीपूर्ण और पुरस्कृत करने योग्य है, और इसे इस रोशनी में सबसे अच्छी तरह देखा जा सकता है।

6.2.1 अंकगणित या बीजगणित

प्राथमिक स्कूल में सीखी गई बुनियादी संकल्पनाओं तथा कौशलों को एक साथ करना कई दृष्टियों से आवश्यक है। पहला, इसलिए कि सभी बच्चों में संख्यात्मकता सुनिश्चित करना प्राथमिक शिक्षा के सार्वभौमिकरण का एक अहम पहलू है। दूसरे, संख्या बोध से संख्या पैटर्न की ओर बढ़ना, संख्याओं के मध्य संबंध देखना तथा इन संबंधों में पैटर्न खोजना, ये ऐसी विधाएँ हैं जो बच्चे में जीवनोपयोगी कौशल लाती हैं। अभाज्य संख्याओं, सम और विषम, विभाज्यता का परीक्षण, वगैरह के विचार ऐसे अन्वेषण के अवसर प्रदान करते हैं।

इस स्तर पर बीजगणितीय संकेतनों का दिया जाना सुसंहत भाषा के रूप में देखा जा सकता है जिसका सारगर्भित अर्थ हो। चरों का उपयोग, रैखिक समीकरणों को बनाना व हल करना, सर्वसमिकाएँ व गुणनखंड करना, ये वे साधन हैं जिनके द्वारा विद्यार्थी नयी भाषा का धाराप्रवाह रूप से उपयोग करना सीखते हैं।

दैनिक जीवन की समस्याओं को हल के लिए अंकगणित व बीजगणित के उपयोग पर जोर दिया जा सकता है। लेकिन इसमें बच्चों की रुचि को जोड़ना तथा समस्याओं के हल करने में सफलता का भाव प्रदान करना महत्त्वपूर्ण है।

6.2.2 आकार, दिक्स्थान और माप

बच्चों को इस स्तर पर विभिन्न प्रकार के नियमित आकार पढ़ाए जाते हैं जैसे त्रिभुज, वृत्त, चतुर्भुज। वे कम से कम चार प्रकार से समृद्ध व नया गणितीय अनुभव प्रदान करते हैं। बच्चे अपने आसपास ऐसे सभी आकारों को देखना प्रारंभ करते हैं और कई सममितियाँ खोजते हैं व सौंदर्यशास्त्रीय भाव प्राप्त करते हैं। दूसरे, वे यह सीखते हैं कि कितने अनियमित लगने वाले आकार नियमित आकारों द्वारा मापे जा सकते हैं, जो विज्ञान में एक महत्त्वपूर्ण तकनीक है। तीसरे, वे दिक्स्थान (स्पेस) के विचार को समझना प्रारंभ कर देते हैं। उदाहरण के लिए, वृत्त एक पथ या सीमा है जो उसके बाहर के स्पेस को भीतर के स्पेस से अलग करता है। चौथा, वे अंकों को आकारों से जोड़ना प्रारंभ कर देते हैं जैसे क्षेत्रफल, परिमाप आदि और सांख्यिकीकरण या अंकगणितीकरण की यह विधि अत्यंत महत्त्वपूर्ण है। इससे यह सुझाव भी

मिलता है कि क्षेत्रमिति तभी सर्वोत्तम होती है जब वह ज्यामिति से जुड़ी हो।

इस प्रकार की गतिविधियों जैसे कागज़ मोड़ना और काटना, सममिति व रूपांतरण के विचारों के अन्वेषण आदि के द्वारा ज्यामिति का एक अनौपचारिक परिचय संभव है। ज्यामितीय गुणों का निरीक्षण और ज्यामितीय सत्य का अनुमान यहाँ मुख्य लक्ष्य हैं। औपचारिक उपपत्तियाँ बाद में दी जा सकती हैं।

6.2.3 दृश्य अधिगम

आँकड़ों का प्रहस्तन (डाटा हैंडलिंग), निरूपण और दृष्टीकरण महत्त्वपूर्ण गणितीय कौशल है जो इस स्तर पर सिखाए जा सकते हैं। वे 'जीवन कौशलों' के रूप में बहुत उपयोगी हो सकते हैं। विद्यार्थियों को यह जानना चाहिए कि किस तरह रेल समय-सारणियों, निर्देशिकाओं और पंचागों में जानकारी को सुसंहत रूप से संगठित किया जाता है।

आँकड़ों के प्रहस्तन की प्रक्रिया को समझने, निरूपित करने और दिन-प्रतिदिन के आँकड़ों के ग्राफीय निरूपण को बढ़ावा देना चाहिए। रैखिक ग्राफ बनाने की औपचारिक तकनीकें पढ़ाई जानी चाहिए।

दृश्य अधिगम समझ, संगठन और कल्पनाशीलता को प्रोत्साहित करता है। द्वि-स्तंभीय उपपत्तियों पर जोर देने के बजाय विद्यार्थियों को कम अनौपचारिक परंतु सहमतकारी तर्कों के द्वारा अपने निष्कर्षों को सही साबित करने का अवसर दिया जाना चाहिए। विद्यार्थी की दिक्स्थान संबंधी तार्किक क्षमता और दृश्यीकरण कौशल का विस्तार होना चाहिए। ज्यामिति के अध्ययन में उपलब्ध तकनीकी का पूरा इस्तेमाल होना चाहिए। सीखने के लिए दृश्य अभिप्राय देने पर विद्यार्थी चित्र, रेखाचित्र, प्रवाहचार्ट, सूत्र और प्रक्रियाएँ याद रखता है।

6.3 माध्यमिक स्तर

यही वह अवस्था है जब गणित एक अकादमिक विषय के रूप में बच्चे के पास आती है। एक अर्थ में, बुनियादी स्तर पर गणित शिक्षण गणित के तर्क से अधिक बच्चों के अधिगमजन्य मनोवैज्ञानिक तर्क से निर्देशित होता है। परंतु माध्यमिक स्तर पर विद्यार्थी गणित की संरचना को समझना प्रारंभ करते हैं। इसलिए तर्कों के ***संकेतन*** और ***उपपत्ति*** अब पाठ्यक्रम की दृष्टि से महत्त्वपूर्ण हो जाते हैं।

गणितीय पद बहुत अधिक कलात्मक, आत्म-सजग और दुर्बोध होते हैं। विद्यार्थी सुविधाजनक अनुभव लेना प्रारंभ कर देते हैं और गणितीय संप्रेषण की विशेषताओं को सरलता से सीखते हैं: सावधानीपूर्वक परिभाषित पद और तथ्य, उन्हें प्रस्तुत करने के लिए प्रतीकों का उपयोग, संक्षिप्त रूप से कहे साध्य जिसमें केवल पहले परिभाषित पदों का उपयोग किया जाता है और साध्य को सत्यापित करने वाली उपपत्तियाँ। विद्यार्थी समझते हैं कि किस प्रकार गणितीय ढाँचा बनता है, तर्क बनाए जाते हैं, पहले सत्यापित किए गए साध्य के आधार पर, जिनसे एक प्रमेय को सिद्ध किया जाता है जिसका उपयोग आगे और सिद्ध करने के लिए किया जाता है।

लंबे समय से ज्यामिति और त्रिकोणमिति को ऐसा क्षेत्र माना जाता रहा है जहाँ विद्यार्थी इस संरचना को अच्छी तरह समझ सकते हैं। प्रारंभिक चरण में यदि विद्यार्थियों ने कई आकार सीख लिए हैं और यह जानते हैं कि उनसे राशियों व सूत्रों को किस प्रकार जोड़ा जाए तो यहाँ वे इन आकारों के विषय में तर्क करना प्रारंभ करते हैं जिसमें परिभाषित राशियों और सूत्रों का उपयोग होता है।

बीजगणित जो पहले ही शुरू हो चुकी है, इस स्तर पर कुछ हद तक विकसित होती है। गणित के अनुप्रयोगों के लिए ही नहीं अपितु गणित में आंतरिक रूप से भी, बीजगणितीय गणनाओं की योग्यता आवश्यक है। ज्यामिति और त्रिकोणमिति में उपपत्तियाँ बीजगणितीय उपकरणों की उपयोगिता दर्शाती हैं। यह सुनिश्चित करना महत्त्वपूर्ण है कि विद्यार्थी जो बीजगणितीय रूप में निष्पादित कर रहे हैं वे उसे ज्यामितिय रूप में दृश्यीकृत कर सकें।

माध्यमिक गणित पाठ्यचर्या का एक बड़ा हिस्सा समेकन को समर्पित होना चाहिए। इसे कई तरह से किए जाने की जरूरत है तथा इसे कई तरह से किया जा सकता है। पहले, विद्यार्थी को उन सभी तकनीकों को

समेकित करने की आवश्यकता है जो उसने सवाल हल करने में सीखी है। उदाहरण के लिए, इसका आशय यह है कि विद्यार्थियों के लिए ऐसे सवालों को पूछने की ज़रूरत है जिसमें एक से अधिक विषयक्षेत्र सम्मिलित हों: बीजगणित और त्रिकोणमिति, ज्यामिति और क्षेत्रमिति इत्यादि। दूसरे, गणित का उपयोग भौतिक और सामाजिक विज्ञान में होता है। इनका आपस में सुस्पष्ट संबंध बनाने से विद्यार्थी बहुत प्रेरित हो सकते हैं। तीसरे, गणितीय प्रतिमानीकरण, आँकड़ों का विश्लेषण और उनकी व्याख्या, इस स्तर पर पढ़ाने से साक्षरता के उच्च स्तर को समेकित कर सकता है। उदाहरण के लिए, किसी पर्यावरण संबंधी परियोजना पर विचार कीजिए जहाँ विद्यार्थी को एक साधारण रैखिय सन्निकटन (लीनियर एप्रॉक्सीमेशन)करना है और किसी घटना का प्रतिमान बनाना है, इसे हल करना है, और प्रतिमानित तंत्र से एक प्रगुण का निगमन करना है। ऐसी गतिविधि से समेकित अधिगम एक जिम्मेदार नागरिक का निर्माण करता है जो बाद में समाचार माध्यमों (मीडिया) में उपलब्ध जानकारी को अंतर्दृष्टि से विश्लेषित कर सकता है तथा प्रजातांत्रिक निर्णय प्रक्रिया में योगदान कर सकता है।

माध्यमिक स्तर पर प्रायोगीकरण और अन्वेषण पर विशेष जोर उचित होगा। *गणित प्रयोगशाला* हाल की घटना है जो भविष्य में आशाजनक रूप से बहुत अधिक विस्तृत होगी।[22] प्रायोगिक गणित गतिविधियाँ बच्चों को दृश्यीकरण में बहुत मदद देती हैं। वास्तव में, सिंह, अवतार एवं सिंह सभी अवस्थाओं पर गतिविधियों के लिए उत्कृष्ट सुझाव देते हैं। इस तरह की प्रयोगशालाओं और गतिविधियों[23] के प्रभाव का आवधिक व्यवस्थित मूल्यांकन इस तरह के प्रयासों के पैमाने के लिए आवश्यक प्रक्रियाओं की योजना बनाने में मदद करेगा।

6.4 उच्चतर माध्यमिक स्तर

प्रधानत: उच्चतर माध्यमिक अवस्था एक तरह का लॉंचिंग पैड है जहाँ से विद्यार्थी को आगे कैरियर का चुनाव करने के लिए निर्देशित किया जाता है कि या तो वह विश्वविद्यालयी शिक्षा प्राप्त करे या कोई अन्य शिक्षा प्राप्त करे। इस समय तक विद्यार्थी की रुचियाँ व योग्यता विस्तृत रूप से निर्धारित हो जाते हैं और इन दो वर्षों में गणित शिक्षण उनकी योग्यताओं को प्रखर बनाने में सहायता करता है।

इस स्तर पर सबसे कठिन चुनाव करना कुछ उसी तरह से होता है जैसे **चौड़ाई और गहराई** के बीच चुनाव करना। एक विस्तृत आधार वाले पाठ्यक्रम के लिए स्थिति बनाई जा सकती है जो विभिन्न विषयों का ज्ञान प्रदान करे। कुछ विषयों के लिए सीमित संख्या में प्रकरण रखने तथा चयनित क्षेत्रों में सामर्थ्य बढ़ाने के लिए हम विचार कर सकते हैं। इन प्रश्नों का कोई सूत्रबद्ध उत्तर मौजूद नहीं है, हम थर्सटन की उपर्युक्त टिप्पणी की ओर फिर इशारा करते हैं।

वस्तुत: थर्सटन चौड़ाई के पक्ष में हैं, चाहे इसे उस उपचारात्मक सामग्री के विकल्प के रूप में ही क्यों न लिया जाए जो बार-बार एक ही तरह की सामग्री की ओर इशारा करता है, उत्साह और सहजता को कम करते हुए।

> *इसके बजाय अधिक पाठ्यक्रम उपलब्ध होने चाहिए... जो गणित की कुछ चौड़ाई का उपयोग करते हैं, जमीनी स्तर से प्रारंभ करने की अनुमति देते हैं, बिना ऐसे प्रकरणों की पुनरावृत्ति के, जिसे विद्यार्थी पहले ही सुन चुके हैं।*

जब हम चौड़ाई का चयन करते हैं, हमें न केवल यह निर्णय लेना है कि कौन-सा विषय विकसित करना है, परंतु यह भी कि उसे किस हद तक विकसित करना है। इस संदर्भ में हम यह सुझाव देंगे कि यह निर्णय *गणितीय विचारों* के द्वारा तय होने चाहिए जैसे, एक विषय के रूप में गणित में प्रक्षेपण ज्यामिति का परिचय देना ज़्यादा महत्त्वपूर्ण है, प्रक्षेपणीय गति की तुलना में (जो हम भौतिकी में अच्छी तरह पढ़ सकते हैं)। इसी तरह प्रक्रिया की लंबाई भी इस बात द्वारा तय होगी कि क्या इससे गणितीय उद्देश्य प्राप्त होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि सम्मिश्र संख्याएँ पढ़ाने का उद्देश्य यह बताना है कि समृद्ध तंत्र में सिद्ध बहुपद समीकरणों के लिए हल मौजूद हैं तो प्रकरण को तब तक विकसित करना चाहिए

जब तक कि विद्यार्थी को यह आइडिया न मिल जाए कि यह कैसे संभव है। यदि इस तरह के उपचार के लिए कोई स्थान नहीं है तो बेहतर होगा कि प्रकरण का परिचय ही न दिया जाए। सम्मिश्र संख्याओं पर प्रक्रियाएँ और उनका निरूपण बताना, बिना यह समझाए कि यह अध्ययन प्रासंगिक क्यों है, सहायक नहीं है।

वर्तमान में, उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित पाठ्यक्रम में अवकलन और समाकलन का प्रभुत्व रहता है जो कक्षा 12वीं की विषयवस्तु का आधे से अधिक भाग है। चूँकि बोर्ड परीक्षाएँ कक्षा 12 के पाठ्यक्रम के आधार पर ली जाती हैं यह विषय विद्यार्थियों व शिक्षकों के लिए अत्यधिक महत्त्वपूर्ण हो जाता है। बोर्ड परीक्षाओं के साथ ही अन्य परीक्षाओं की प्रकृति को देखते हुए इस स्तर पर कलन के अभिकलनी पहलुओं का गणित में प्रभुत्त्व रहता है। यह अत्यंत दु:खद है कि कई रुचिपूर्ण प्रकरण (समुच्चय, संबंध, तर्क, अनुक्रम और श्रेणियाँ, रैखिक असमिकाएँ, कांबीनेटोरिक्स) जो विद्यार्थियों को 11वीं कक्षा में प्रारंभ किए जाते हैं, अच्छी गणितीय अंतर्दृष्टि दे सकते हैं, परंतु ये अत्यंत संक्षिप्त में दिए जाते हैं। पाठ्यक्रम निर्माताओं को 11वीं कक्षा तथा 12वीं कक्षा में विषयवस्तु के वितरण पर ध्यान देना चाहिए।

दुनिया के कई भागों में इस स्तर पर गणित के विभिन्न पहलुओं को प्रदान करके विकल्पों की इच्छा को स्वीकार किया गया है। लेकिन विकल्पों की व्यवस्था का क्रियान्वयन नितांत कठिन है क्योंकि इसके लिए विविध पाठ्यपुस्तकों तथा अधिक संख्या में शिक्षकों की आवश्यकता होगी तथा साथ ही साथ केंद्रीकृत परीक्षा स्वरूप भी ज़रूरी होगा। फिर भी ऐसे विचारों के साथ प्रयोग करना उचित होगा जो विद्यार्थियों को ढेर सारे विकल्प प्रदान करता हो।

6.5 गणित और गणितज्ञ

पाठ्यक्रम के सभी स्तरों पर एक मानवीयता का तत्व होना ज़रूरी है। गणित के विकास से जुड़ी कई रुचिकर कहानियाँ हैं जो बताई जा सकती हैं और प्रत्येक विद्यार्थी के दैनिक जीवन में कुछ ऐसे अनुभव होते हैं जो गणित के लिए प्रासंगिक होते हैं। इन कहानियों और अनुभवों को पाठ्यक्रम में शामिल करना बच्चों के लिए गणित को किसी परिप्रेक्ष्य में देखने के लिए अहम है। गणितज्ञों का जीवन और गणितीय अंतर्ज्ञान की कहानियाँ न केवल गणित के प्रति प्रेम उत्पन्न करने वाली हैं बल्कि वे प्रेरणादाई भी हो सकती हैं।

भारतीय गणितज्ञों के योगदान को रेखांकित करने के लिए एक उदाहरण दिया जा सकता है। ऐसे योगदानों के प्रति प्रशंसा भाव विद्यार्थियों को मदद करेगा यह जानने में कि हमारी संस्कृति में गणित का क्या स्थान है। गणित भारतीय संस्कृति व इतिहास का महत्त्वपूर्ण अंग रही है। छात्र इतिहास के प्रारंभिक कालों में भारतीय गणितज्ञों द्वारा दिए गए अभूतपूर्व योगदान को जान समझकर अत्यधिक प्रेरित होंगे।

इसी प्रकार, पूरी दुनिया से महिला गणितज्ञों के योगदान को रेखांकित करना भी उचित होगा। यह इस प्रचलित मिथ को तोड़ने के लिए ज़रूरी है जिसके अनुसार गणित पुरुषों का क्षेत्र है। इसके अतिरिक्त ज़्यादा से ज़्यादा लड़कियाँ गणित की ओर आएँ, इसके लिए भी ऐसा करना ज़रूरी है।

7. निष्कर्ष

एक अर्थ में, ये वे कदम हैं जिनकी दशकों से गणित शिक्षकों द्वारा वकालत की गई है। जो फ़र्क है वह है पाठ्यचर्यात्मक चयन द्वारा इन उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए महत्त्व देने में। गणित शिक्षण का जो दृष्टिकोण है उसके पीछे जो सबसे मजबूत कारण यह है कि इससे बच्चों को मदद मिलेगी जहाँ तक उनसे उँची अपेक्षाओं का ताल्लुक हैं। ऐसा इस तरह के पाठ्यक्रम द्वारा होगा जिसमें बुनियादी कौशलों के परे विविध गणितीय मॉडल तथा शिक्षाशास्त्र समाविष्ट हों, जो सवालों को हल करने तथा सक्रिय अधिगम पर शिक्षण हेतु ज़्यादा समय दें। कई विद्यार्थियों को मौजूदा पाठ्यक्रम नीरस और निराशाजनक लगता है जो यह दृष्टिकोण विकसित करता है कि गणित में सफलता जन्मजात क्षमताओं पर निर्भर करती है तथा जिनमें यह क्षमता नहीं है वे यह अनुभव करते हैं कि गणित किसी भी परिस्थिति में उनके जीवन में उपयोगी

नहीं हो सकती। हमने अपने दृष्टिकोण में जिस अधिगम वातावरण की बात की है वह विद्यार्थियों को गणित के महत्त्व को समझने व उसका आनंद प्राप्त करने में सहायता करेगा। उन्हें विभिन्न शैक्षिक व कैरियर संबंधी विकल्पों के लिए आवश्यक उपकरण प्रदान करेगा और नागरिक के रूप में प्रभावी रूप से कार्य करने में सहायक होगा।

उत्कृष्ट गणित शिक्षण का जो हमारा दृष्टिकोण है वह दो जुड़वाँ स्तंभों पर आधारित है। वह यह हैं कि सभी विद्यार्थी गणित सीख सकते हैं तथा सभी विद्यार्थियों को गणित सीखने की जरूरत है। पाठ्यचर्याएँ विद्यार्थियों की असफलता की कल्पना करती हैं, उन्हें असफल होना ही है। हमें ऐसी पाठ्यचर्याएँ विकसित करने की ज़रूरत है जो बच्चे की सफलता की कल्पना करें। हम एक निर्णायक मुकाम पर हैं जहाँ हम सबको शिक्षा की गारंटी देना चाहते हैं इसलिए यह ऐतिहासिक ज़रूरत है कि हम बच्चों को उच्चतम गुणवत्ता की गणित शिक्षा प्रदान करें।

पठन सामग्री–2

ऋणात्मक संख्याएं और उनका क्रम

ऋणात्मक संख्या सिखाने में मुश्किल आती है उसके पीछे एक कारण है कि जब इन्हें रोजमर्रा के उदाहरणों के जरिए सिखाने की कोशिश करें तो उसमें भी निहित समस्याएं है। यह सुझाव हो सकता है कि लेन देन के संदर्भ में उधारी को ऋणात्मक संख्याओं से दर्शाएं और चूंकि यह अपने आसपास पाई जाने वाली एक सामान्य घटना है, इसलिए बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं का मूर्त अनुभव मिलेगा। परन्तु इस उदाहरण के साथ मुश्किल यह है कि पूर्णांकों के क्रम को जो परिचय हम देना चाहते हैं, वो उधारी के बारे में जैसे हम सामान्य तौर पर चर्चा करते हैं, उसके विपरीत है। अगर 'ए' पर 100 रुपए की उधारी है और 'बी' पर 200 रुपए की तो हम ये नहीं कहते कि 'बी' के पास 'ए' से कम पैसे हैं। बल्कि हम कहते हैं कि 'ए' पर –'बी' से कम उधारी है।

इसलिए अगर हम ऋणात्मक संख्याओं का परिचय करवाने के लिए उधारी से संबंधित गतिविधि करें और 100 व 200 रुपए की उधारी को –100 व –200 के रूप में प्रदर्शित करें, तो यह कहना स्वाभाविक लगेगा कि –200, 100 से बड़ा होता है। जबकि गणितीय रूप में दरअसल– 200, 100 से कम या छोटा होता है।

रोजमर्रा जीवन का यह एक ऐसा उराहरण है जिसे ऋणात्मक संख्याओं की शुरूआत करने के लिए सबसे ज्यादा इस्तेमाल किया जाता है। और इसी वजह से चूंकि यह हमारे जीवन से लिया हुआ उदाहरण है इसके बारे में हम जो कहते समझते हैं उसकी एक अपनी भाषा है– वह भाषा जो ऋणात्मक संख्याओं की गणितीय भाषा से मेल नहीं खाती।

अगर संख्याओं को एक लाइन पर दर्शाने के पीछे जीवन की परिस्थितियों को समझाने का प्रयोजन होता तो हमारी संख्या रेखा ऐसी नहीं दिखती जैसी कि यह है। संख्या रेखाएं बनाते हुए पहली रेखा 0,1,2,3 ....आगे बढ़ती जाती –दाहिनी तरफ पूर्णांकों के रूप में लगातार बढ़ती हुई, जिस पर हम आय इत्यादि जैसी संख्याओं को दर्शाते। दूसरी रेखा–1, 2, 3, .. से शुरू होकर आगे बढ़ती जाती जिस पर बांयी ओर लगातार ऋणात्मक संख्याएं दर्शाई जाती जिन पर हम 'उधारी' प्रदर्शित कर सकते। इसी तरह हम दरअसल आय और व्यय का हिसाब रखते हैं–दो अलग–अलग खातों में।

संख्याओं को दो अलग–अलग रेखाओं पर दर्शाने से, हम इस तरह के निरपेक्ष (Absolute) सवालों को दरकिनार कर सकते हैं ।"क्या–1, 1 से कम है?" ऐसी स्थिति में हम केवल एक तरह की संख्याओं की ही आपस में तुलना करेंगे। 13 और 17 की तुलना करते हुए हम कह सकते हैं कि 17 का मान 13 से ज्यादा है। इस परिस्थिति मे हम ऐसे सवालों की उपेक्षा कर सकते हैं कि '17 बड़ा है या 13?,' क्योंकि जिन संदर्भों के बारे में हम सोच रहे हैं उनमें हमें जरूरत नहीं लगती कि इनकी तुलना की जाए।

परन्तु गणित के दायरे में ऐसे सवाल कि 'क्या–1, 1 से छोटा है?' काफी महत्वपूर्ण व प्रासंगिक है, इसलिए धनात्मक व ऋणात्मक, दोनों तरह की संख्याओं को एक रेखा पर प्रस्तुत करना स्वाभाविक है। इसलिए रोजमर्रा की जिन्दगी से लिए हुए उदाहरण / मॉडल ऋणात्मक संख्याओं का परिचय करवाने व उन्हें समझाने के लिए उपयुक्त नहीं है।

ऋणात्मक संख्याओं का एक अन्य उदाहरण जो इस्तेमाल किया जाता है वो तापमान मापने का है। उदाहरण के लिए मौसम का ब्यौरा देते हुए शून्य से नीचे के तापमान को ऋणात्मक संख्याओं से दर्शाया जाता है -4^0C, -1^0C तापमान से कम है, और दोनों 0^0C तापमान से कम है। यहां पर रोजमर्रा की सामान्य भाषा और गणित की भाषा में कोई विरोधाभास्स नहीं है। थर्मामीटर से धनात्मक व ऋणात्मक (शून्य से नीचे) तापमानों को एक रेखा पर दर्शाया जाता है, जैसे हम धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं को एक ही रेखा पर दर्शाते हैं।

परन्तु इस उराहरण को भी कक्षा में ले जाने में समस्या है। सबसे सामान्य -सी दिखने वाली समस्या तो यही है कि हिन्दुस्तान में बमुश्किल ही शून्य से कम तापमान अनुभव किया जाता है। इसलिए हमारे पास यह पता करने का (अनुभव करने का) कोई तरीका नहीं है कि -4^0C, -1^0C से कम है। इसलिए यह उदाहरण सचमुच में रोजमर्रा की जिन्दगी से लिया हुआ उदाहरण नहीं है। परन्तु असली मुश्किल तो यह है कि विभिन्न तापमान के साथ संख्याओं का सम्बन्ध स्वैद्धिक (arbitrary) है।

सैल्सियस पैमाने पर पानी के जमने का तापमान 0^0C माना जाता है, जबकि फैरनहाइट पैमाने पर पानी के जमने को 32^0C माना गया है और उसी को केल्विन पैमाने पर 273 K यानी कि इन तीनों पैमानों पर 0 का मतलब यह नहीं है कि 'तापमान' नहीं है।' अगर हम केल्विन पैमाने का इस्तेमाल करें तो हमें तापमान दर्शाने के लिए ऋणात्मक संख्याओं का प्रयोग करना ही नहीं पड़ेगा।

धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं को सिखाने के लिए किताबों में रोजमर्रा के उदाहरणों का इस्तेमाल किया जाता है। अक्सर ये उदाहरण एक स्थिर बिन्दु से दोनों दिशाओं में विपरीत ओर जाने पर आधारित होते हैं-जैसे कि समुद्रतल से ऊपर या नीचे की ओर की दूरी। या घर से दाएं या बाएं जाने पर दूरी। इनमें से समुद्रतल से ऊपर-नीचे जाने वाला उदाहरण ऋणात्मक संख्याओं को समझाने के लिए शायद ज्यादा बेहतर होगा- शायद इसलिए क्योंकि वह हमारी सामान्य सांस्कृतिक मान्यताओं से मेल खाता है कि ऊपर की ओर जाने का मतलब है ऊंचा होना, ऊंचाई पर जाना तो धनात्मक है, नीचे की ओर जाने का मतलब है गहराई में जाना, नीचे जाना और इसलिए ऋणात्मक है। परन्तु दूसरी ओर इस बात पर विवाद हो सकता है कि क्या यह कहा जा सकता है कि समुद्रतल से 100 मीटर नीचे, समुद्रतल से 200 नीचे से ज्यादा है?

संख्याओं की क्रमबद्धता

प्राकृतिक संख्याओं के क्रम , इसलिए समस्त पूर्णांकों के क्रम में यह परंपए अपनाई गई है कि अगर आपके पास दो अलग संख्याएं हों, तो छोटी संख्या को बड़ी संख्या के बांयी ओर रखा जाएगा। छोटी संख्या से बड़ी संख्या प्राप्त करने के लिए हमें, उस छोटी संख्या में धनात्मक संख्या को जोड़ना होता है। इसलिए 1, 2 के बाई ओर होता है, 10,15 के बाई ओर, आदि-आदि और जैसे-जैसे हम दाहिनी ओर बढ़ते जाएं संख्याएं बड़ी होती जाती हैं।

ऋणात्मक संख्याओं के साथ भी इसी परंपरा का पालन होता है। दूसरे शब्दों में, दो ऋणात्मक संख्याओं के बीच, छोटी संख्या को बड़ी संख्या के बांयी ओर लिखा जाएगा। इसका अर्थ है कि पहले हमें मालूम होना चाहिए कि कौन सी संख्या छोटी है और कौन सी बड़ी। जबकि रोजमर्रा के उदाहरणों का इस्तेमाल करते हुए धनात्मक

संख्याओं के बारे में छोटी, बड़ी संख्या तय करना आसान है, परन्तु ऋणात्मक संख्याओं के संदर्भ में यह तय करना बिल्कुल भी सरल नहीं है।

अब लेख की शुरूआत में जिक्र किए गए सवालों में से एक को देखते हैं– "कौन–सी संख्या बड़ी है, –1 या –4 ?" अगर हमारे द्वारा सोचे गए उदाहरणों में से कोई भी यह सम्प्रेषित नहीं कर पाता कि –1, –4 से बड़ा है, क्योंकि –4 , –1 के बाई ओर है।' और आशा रखे कि बायीं और क्यों है। क्योंकि दरअसल मामला एकदम उल्टा है। –4, –1 से बाई और है क्योंकि –4, –1 से छोटा है। और –4, –1 से छोटा है क्योंकि –4 से –1 प्राप्त करने के लिए हमें धनात्मक संख्या 3 जोड़नी पड़ती है। यह तर्क हमारे उस तर्क से मेल खाता है जो पहले हमने धनात्मक संख्याओं के लिए अपनाया था कि 1, 4 से छोटा है क्योंकि उसमें जोड़ने पर हमें 4 मिलता है। यह तर्क बच्चों को कैसे समझांए ? इस पूरी चर्चा के बाद यही समझ में आता है कि बच्चों को पूर्णाकों की क्रमबद्धता समझाने के लिए न तो रोजमर्रा की जिन्दगी के उदाहरण काम आते हैं, और न ही शुद्ध गणितीय तर्क।

खेलों के जरिए

अब तक की चर्चा से लग सकता है कि ऋणात्मक संख्याएं समझाने का कोई तरीका ही नहीं। ऐसा भी नहीं है। हम शायद अभी भी बच्चों को उनके जीवन के ऐसे दृष्टांतों का सहारा लेकर ऋणात्मक संख्याओं से परिचय करवा सकते हैं जिनमें वे इन्हें इस्तेमाल करते हैं, इनसे सम्मुख होते हैं।

अपनी तरह से बच्चे–1 समझ पाते हैं जब भी वे किसी खेल में हार जाते हैं और +1 जब वे जीत जाते हैं। हमने कक्षा छठवीं के बच्चों के साथ एक खेल, खेल कर देखा। पासा फेंकने पर अगर उन्हें सम संख्या मिलती है तो वे जीत जाते हैं, विषम संख्या मिलने पर वे हार जाते हैं। बच्चों को छोटे समूहों में बांटा गया और प्रत्येक समूह के हर विद्यार्थी को 10 राउण्ड खेलने को कहा गया । हर छात्र को अपने स्कोर का ध्यान रखना था, गिनते जाना था और अंत में हर समूह को अपने सदस्यों को सबसे ज्यारा से सबसे कम स्कोर के क्रम में रखना था। यह देखकर हैरानी हुई कि दस राउण्ड के अंत में छात्रों को अपने स्कोर की गणना करने में कोई दिक्कत नहीं आई।

अगर कोई 5 राऊण्ड जीता और 5 हारा तो स्पष्टत: हार–जीत आपस में कट गए और उस छात्र को 0 स्कोर/ अंक मिले। जो छात्र 7 राउण्ड हारा और 3 जीता उसे 4 अंक मिले। वे समूह के सदस्यों के स्कोर को भी घटते क्रम में जमा पा रहे थे, सबसे ज्यादा से लेकर सबसे अंक किसे मिले। जिसे –4 अंक मिले उसे–1 से नीचे रखा गया, स्पष्ट: ज्यादा राऊंड हारना, मतलब कम अंक मिलना। अगर हम बच्चों के इस विवेक/ सहजबुद्धि का इस्तेमाल करे तो यह समझना, आसान हो जाता है कि –1 को 0 के बाई ओर रखा जाना चाहिए आदि–आदि। और इस तरह से हमारी संख्या –रेखा का निर्माण हो जाएगा। इससे यह संभव लगता है कि कक्षा छठवीं के छात्रों का ऋणात्मक संख्याओं एवं उनपके क्रम का परिचय करवाया जा सकताहै– और पूर्णांको के साथ एक जीवन्त रिस्ता और बनावाया जा सकता है।

ऋणात्मक संख्याओं के क्रियाएं

चलिए अब अगले सवाल को देखते हैं "ऋणात्मक संख्याओं के साथ गणितीय क्रियाओं की शुरूआत'' कैसे करें? यह एक ऐसा पहलू है जिससे बच्चों को काफी समस्या आती है और यह स्वाभाविक भी है। सबसे पहले समस्या तो संकेतो के साथ ही है '–' का इस्तेमाल हम घटाने की क्रिया के लिए करते हैं, ऋणात्मक संख्या को दर्शान के लिए भी, जिससे बच्चा भ्रम के जाल में फंस जाता है। ऋणात्मक संख्याओं के जूझते हुए सबसे पहली बुनियादी समस्या बच्चे के सामने आती है कि (–4–2)जैसे किसी सवाल का अर्थ क्या लगाएं। जिस बच्चे ने ऋणात्मक संख्याएं सीखने की अभी शुरूआत ही की है उसे बिल्कुल भी स्पष्ट नहीं होता कि (–4–2) का अर्थ होता है कि ऋणात्मक संख्या –4 में से 2 घटाना है फिर दोनों ऋणात्मक संख्याएं हैं जिन्हें जोड़ना है। शुद्ध गणितीय स्वरूप में –4–2= (–4) +(–2) है या (–4) –(+2) ? बच्चे अभी ये नहीं जानते कि दरअसल दोनों एक ही हैं।

दरअसल ऋणात्मक संख्याओं की पढ़ाई शुरू करने पर बच्चा जो चीजें अब तक बहुत अच्छी तरह से जानता था उन सबमें भी गड़बड़ा जाता है।

ऋणात्मक संख्याओं से परिचय से पहले, बच्चे के लिए 6–4 का अर्थ था 6 में से 4 घटाना। पर अब उसी सवाल का अर्थ बदल जाता है। 6 + (–4), या 6 और ऋणात्मक संख्या –4 का जोड़ भी हो सकता है, और इसलिए बच्चा पशोपेश में पड़ जाता है। अब उनको भरोसा नहीं होता कि इस सवाल का जवाब 2 ही होगा क्या?

इस समस्या से बचने के लिए कुछ लेखकों ने सुझाया कि ऋणात्मक संख्याओं को दर्शाने के लिए संख्याओं केऊपर की तरफ बायीं ओर संकेत इस्तेमाल किया जाए, जैसे कि –2 और +7 इस नए तरीके को अपनाने से बच्चों के लिए (–4–2) की दुविधा खत्म हो जाएगी। इसके बदले हम स्पष्ट रूप से (–4+–2) और (–47+2) इस्तेमाल करेंगे। पहली स्थिति में हम ऋणात्मक संख्या –2 में ऋणात्मक संख्या –4 जोड़ रहे है और दूसरी स्थिति में संख्या 2 घटा रहे हैं। यह तथ्य कि दोनों ही स्थितियों में जवाब एक ही होगा, बच्चे के अपने अवलोकन से निकल सकता है –जब एक बार वो इने तरीके से जोड़–घटाने में पारंगत हो जाए।

जब हम दो संख्याओं को जोड़ने का नियम बनाने की कोशिश करते हैं, तब नियम भी हमारे द्वारा इस्तेमाल किए जाने वाले गणितीय संकेतों की समस्या बरकरार रहती है। दो संख्याओं के जोड़ नियम को इस तरह से लिखा जा सकता है "दो धनात्मक संख्याओं का जोड़ धनात्मक होता है, और ऋणात्मक संख्याओं का जोड़ ऋणात्मक होता है, अगर दोनों संख्याएं विपरीत चिन्ह वाली है तो जोड़ धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।"

नए संकेतो में इसे इस उदाहरण से दर्शाया जा सकता है–

$^{-}4 + {}^{-}2 = {}^{-}6$

$^{+}5 + {}^{+}7 = {}^{+}12$

$^{+}8 + {}^{-}4 = {}^{+}4$

$^{-}8 + {}^{+}4 = {}^{-}4$

$^{-}8 + {}^{+}8 = 0$

परन्तु जो तरीका हम इस्तेमाल करते हैं इन्हें ऐसे लिखा जाएगा–

$-4 -2 = -6$

$5 +7 = 12$

$+8 -4 = 4$

$-8 + 8 = 0$

चूंकि इस तरीके में हम कब जोड़ रहे हैं और कब घटा रहे है यह व्याख्या का सवाल है, अपने आप में नियम भी भ्रामक हो जाता है। आमतौर पर तो हम नियम को परिभाषित ही नहीं करते। हम इतना भर कह देते हैं "अगर दोनों संख्याएं एक ही चिन्ह वाली हों तो संख्याओं को जोड़ दें (जिसका अर्थ कि उनका मान जोड़ दें) और इस चिन्ह को सामने लगा दें। अगर दोनों संख्याओं के चिन्ह विपरीत हों तो छोटी संख्या को बड़ी संख्या मे ंसे घटा दें, और उसके सामने बड़ी संख्या का चिन्ह लगा दें।" हालांकि हो सकता है कि पूर्णांकों को जोड़ सिखाने का यह एक आसान तरीका हो, परन्तु सोच विचार करने वाला कोई बच्चा /बच्ची जिसने अभी सीखा है कि ऋणात्मक संख्या सदैव धनात्मक संख्या से छोटी होती है इससे जरूर भ्रम में पड़ जाएगा, कन्फ्यूज़ हो जाएगा। उसके लिए (–8 +4) से सामना होने पर –8 छोटी संख्या होगी न कि 4 हो सकता है कि इस वजह से बच्चा इसे 4 –(–8) समझ ले, अगर वो इन चीजों को समझने के स्तर पर पहुंच चुका है तो उसका जवाब 12 होगा, –4 की बजाए जो कि सही जवाब है।

इन संकेतों की वजह से बच्चों को जो समस्या आती है उसे अब कई विशेषज्ञों/शिक्षकों ने पहचाना है। होमी भाभा सेन्टर फॉर साइन्स एज्यूकेशन (HBCSE) में गणित शिक्षण पर काम करने वाले समूह ने इसे सुलझाने के लिए तक और तरीका अपनाया है। (8–3) जैसी अभिव्यक्ति के लिए वे लिखते हैं 8 –3 जहां इसमें 8 और –3 दो पद हैं। इस क्रिया का जवाब निकालने के लिए वे दोनों पदों को जोड़ देते हैं, इकट्ठा कर देते हैं। ऋणात्मक संख्याओं के लिए काले रंग के और धनात्मक संख्यओं के लिए लाल रंग के कार्ड इस्तेमाल करते हुए वे अधिकतम लाल व काले कार्ड कैन्सल कर देते है, जो भी बच जाता है वही इस सवाल का हल हैं। (8 –3) वाले उदाहरण में 9 लाल कोर्ड में से 3 लाल कार्ड को 3 काले कार्ड काट देते है, और 5 लाल कार्ड बच जाते हैं। इस तरीके से सीखने में बच्चों की प्रतिक्रिया बेहतर पाई गई है।

जोड़ने के लिए नियम के बाद, हमसे घटाने के लिए भी नियम देने की अपेक्षा होती है। इसके लिए नियम होगा, "अगर हम ऋणात्मक संख्या में से धनात्मक संख्या घटाएं तो हमें ऋणात्मक संख्या मिलेगा। अगर दोनों संख्याएं विपरीत चिन्ह वाली हों तो अन्तर धनात्मक ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।" पहले से परेशान छठवीं कक्षा के किसी बच्चे को एक इतना जटिल नियम बताने पर उसकी हालत कैसी होगी यह आप समझ ही सकते है। खासतौर पर जब इसके बाद उसे

$5-(-7) = 12$

और $-5-(-7) = 2$

जैसे- उदाहरणों का सामना करना पड़े।

चूंकि अवधारणात्मक रूप में ऋणात्मक संख्याएं काफी मुश्किल हैं, इसलिए उनके परिचय के पहले साल में केवल जोड़ व घटा की क्रियाएं पर ही रुक जाना चाहिए। ऋणात्मक संख्याओं के बारे में और आगे बढ़ने की बजाए गणित में जो सब अब तक पढ़ा है उसका ज्यादा अभ्यास किया जा सकता है। परन्तु अपेक्षा होती है कि पूर्णांक संख्याओं का गुणा और भाग भी उसी सत्र में करवा देना चाहिए।

ऋणात्मक संख्या से धनात्मक संख्या के गुणा को बारम्बार किए गए जोड़ के रूप में देखा जा सकता है-

$3 \times (-5) = (-5) \times 3$

$= (-5) + (-5) + (-5)$

परन्तु दो ऋणात्मक संख्याओं का गुणा अपने आप में कोई अर्थ नहीं रखता, सिवाय एक गणितीय रचना के। और ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक संख्या से गुणा, धन क्यों होना चाहिए, यह स्कूली पाठ्यक्रम कहा हिस्सा हो ही नही सकता। इसलिए हमें इस नियम के रूप में बताना पड़ता है और तब वे सीखते हैं "ऋण ऋण धन होता है" बिना इसका जिक्र किए कि यह किस क्रिया के बारे में कहा जा सकता है। यह सब करने के बाद हमारे पास दिग्भ्रमित बच्चों की जमात होती है। जिन्हें ये नहीं मालूम कि 'ऋण-ऋण' 'धन' कब होता है।

साभार-जयश्री सुब्रमण्यम

पठन सामग्री-3

बीजगणित में विकास के चरण एवं उसकी अवस्थाएं :

आज जो बीजगणित का स्वरूप हम देखते हैं और प्रयोग में लेते हैं उस स्वरूप में आने में कई सदियाँ लगी और कई चरणों में इसका विकास हुआ है । इस विकास क्रम में तीन मुख्य चरण हैं :

डाइयोफैनट्स से पूर्व (लगभग 250 ईसवी): हैंटोरिक चरण या शाब्दिक अवस्था

इतिहास मे ऐसा देखने को मिलता है कि लोग अपनी आम समस्याओं का हल अपनी सामान्य भाषा में ही किया करते थे । कोई विशेष प्रकार के चिन्हों का प्रयोग उस काल में नही हुआ करता था । सब कुछ आम बोलचाल कि भाषा में वर्णित किया जाता था । उदाहरण के लिए $x + 1 = 2$ का शाब्दिक रूप इस प्रकार से लिखा जा सकता है "किसी में एक जोड़ने पर दो प्राप्त होता है" या संभवत: किसी में 1 जोड़ने पर 2 प्राप्त होता है ।

डाइयोफैनट्सके समय में (लगभग 250 ईसवी से 1600ईसवी): संक्षिप्त अवस्था

बीजगणित कि संक्षिप्त अवस्था का वर्णन लगभग 275 से शुरू हुआ जिसका श्रेय डाइयोफैनटस को है जिसने सबसे पहले बीजगणित में संकेतो और चिन्हों का प्रयोग किया था । ये कुछ आशुलिपि संकेतों जैसा होता था । डाइयोफैनटस ने अज्ञात राशि, छटी तक के घातांक, घटा चिन्ह, बराबर का चिन्ह, व्युत्क्रम को दर्शाने के चिन्हों का प्रयोग किया था । डाइयोफैनटस को बीजगणित के जनक के रूप में भी जाना जाता है । डाइयोफैनटस को उनके द्वारा दी गई समीकरणों से भी याद किया जाता है जिनहे डाइयोफैनटाइन समीकरण कहते हैं

इस काल में अज्ञात राशि के लिए संकेतों का प्रयोग शुरू हो गया था लेकिन इसका प्रयोग बहुत सीमित था । इस काल में ज्यादा जोर समीकारणो को हल करने पर था यानि के अज्ञात राशि के मान को ज्ञात करना जिनको कि अक्षरों से दर्शाते थे । उदाहरण के लिए $x + 1 = 2$ का संक्षिप्त रूप कुछ इस प्रकार से होगा को जब 1 में जोड़ते है तो 2 प्राप्त होता है।"

अमूर्त अवस्था (1600ईसवी से आज तक): सांकेतिक अवस्था

इस काल में अक्षरों का प्रयोग न केवल अज्ञात को दर्शाने के लिए होता था अपितु दी गई राशियों (स्थिर राशियों या प्राचल) के लिए भी अक्षरों का प्रयोग करना शुरू हो गया था । इस शुरुआत से समस्याओं के व्यापक हल प्राप्त करना संभव हो पाया और इससे विभिन्न पैटर्न का व्यापीकरण भी किया गया। उदाहरण के लिए $x+1=2$ समीकरण को व्यापक रूप और सांकेतिक अवस्था में इस प्रकार से लिखा जा सकता है : $ax + b = c$ यहाँ a , b और c प्राचल (Constant) है ।

भारतीय गणितज्ञों का मुख्य योगदान : ब्रहमगुप्त, भास्कर, आर्यभट्ट, श्रीधराचार्य

हिन्दू सभ्यता में जो कुछ भी हमे गणित में मिलता है वो लगभग 2000 ई.पू. के बाद का है । दशमलव पद्धति लगभग 600 ईस्वी में परिपक्व मानक रूप में स्थापित हुई थी। हिंदुओं ने शून्य को एक संख्या की तरह माना था और उसके साथ संक्रियाओं को भी करके देखा और समझा। हिंदुओं ने बीजगणित और अंकगणित दोनों में ही प्रगति हासिल की । उन्होंने कुछ चिन्हों का विकास भी किया जो बहुत ज्यादा नही था परंतु उनके बीजगणित को सांकेतिक कहने के लिए पर्याप्त था।

हिंदुओं ने ऋणात्मक संख्याओं का प्रयोग किसी ऋण को दर्शाने के लिए किया था । पहली बार ब्रह्मगुप्त ने 628 ई. मे इसका प्रयोग किया था । ब्रह्मगुप्त का नजरिया संख्याओं को लेकर कुछ अमूर्त चीजों से था, वे उन्हे केवल गिनने का या मापन का साधन नहीं मानते थे । गणित के विकास मे उनका यह नजरिया बहुत महत्वपूर्ण साबित हुआ । उससे पहले –3, –4 जैसी समस्याएँ व्यर्थ मानी जाती थी या शून्य के समकक्ष मान लिया करते थे । तभी ब्रह्मगुप्त को ऋणात्मक संख्याओं के होने की आवश्यकता महसूस हुई जिसे ब्रह्मगुप्त ने ऋण से संबोधित किया जोकि किसी संपत्तिके उधार के समतुल्य होता था। ब्रह्मगुप्त ने ऋण संख्याओं के साथ काम करने के कुछ नियम भी बनाए जैसे कि ऋण संख्या गुना ऋण संख्या बराबर धन संख्याऔर ऋण संख्या गुना धन संख्या बराबर ऋण संख्या आदि । ब्रह्मगुप्त ने बताया कि द्विघात समीकरण जोकि इस रूप में हो $x^2 + 2 = 11$, उसके दो हल संभव हो सकते है, जिसमे से एक ऋणात्मक भी हो सकता है, क्योंकि

$3^2 = 9$ और $(-3)^2 = 9$

हिन्दुओं ने यह भी स्थापित किया कि द्विघात समीकरण के अपरिमेय मूल भी हो सकते है। हालांकि वो सभी द्विघात समीकरणो को हल नही कर पाये थे क्योंकि उन्हे ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल के बारे में कोई जानकारी नही थी। हिन्दू गणितज्ञ श्रीधराचार्य ने द्विघात समीकरणों के मूल को ज्ञात करने के लिए सूत्र भी दिया था जो कि इस प्रकार है

यदि कोई द्विघात समीकरण $ax^2 = bx + c = 0$ के रूप मे है तब,

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, a ‡ 0

नोट: $a, b, c \in R$ और $b^2 \geq 4ac$ (केवल वास्तविक मूल के लिए)

"Indeterminate equations" को हल करने में भी हिन्दू, डायफैन्टस से बहुत आगे थे । आर्यभट्ट (476 ई. पू.) ने $ax \pm by = c$ रूप में प्रदर्शित होने वाले समीकरणों के पूर्ण हल आज के समय की विधि के समकक्ष विधि से निकाल लिए थे । उन्होंने "indeterminate द्विघात" समीकरण को भी माना था

पठन सामग्री–4

Teaching and Learning Algebra- By Dough French

अज्ञातऔर चर

बीजगणित शिक्षण और अधिगम में अक्षरों के उपयोग से संबंधित विभिन्न व्याख्याएं सामने आई जिन्हेंक यहां छः भागों में विभाजित, वर्गों करके रखा गया है। (हार्ट, 1981)

1) संख्या के स्थान पर।

2) अक्षर होते है लेकिन उनका का प्रयोग नही होता है।

3) वस्तु से जोड़ कर।

4) विशिष्ट अज्ञात के रूप में।

5) सामान्यी त संख्या के रूप में।

6) चर के रूप में।

संख्या के स्थान पर

पहले मामले में हम अक्षर का उपयोग किसी खास मान के एवज में करते हैं। जैसे हम देखे कि a = 3 जब होगा जबकि हमे दिया हो, a + 5 = 8 अब ऐसी स्थिति में हमें किसी तरह कि कोई संक्रिया या पुर्नव्यवस्था की आवश्यकता नहीं है क्योंकि हम इससे भली–भांति परिचित है कि 3 + 5 = 8 होता है।

अक्षर होते हैं लेकिन उनका प्रयोग नही होता है

दूसरे मामले में,जब अक्षरों के रूप में मूल्य दिया गया है और साथ मे कुछ जानकारी भी होती है। जैसे हमसे यदि a + b + 2 का मान पूछा जाता है, जबकि दिया गया है a + b + 2 = 42 ऐसी स्थिति में हमें पता है कि हम सिर्फ 2 को 42 मे जोड़कर मान प्राप्त कर सकते है, हमें a एवं b के साथ किसी तरह की कोई प्रक्रिया करने कि आवश्यकता नहीं पड़ेगी। अतः हम a+b+2 का मान a एवं b को नजरअंदाज करते हुए पता कर सकते है।

वस्तु से जोड़कर

कभी–कभी व अक्षर को किसी वस्तु को प्रदर्शित करने के लिए उपयोग किया जाता है जो कि गलतफहमी पैदा कर सकता है कि उसे किसी संख्या या मात्रा के लिए उपयोग किया गया होगा। जैसे b एवं c, banana और carrot के लिए उपयोग किया जा सकता है और K किलोमीटर के लिए ये दोनों ही इस तरह की घटना के विशिष्ट उदाहरण है।

विशिष्ट अज्ञात के रूप में

विशिष्ट अज्ञात की व्याख्या या अर्थ समीकरण हल करने के साथ जुडा हुआ है और इस संदर्भ मे इससे अच्छा

उदाहरण कुछ हो नहीं सकता है। हालांकि टकराव तब भी पैदा हो सकता है जब बच्चों का सामना इस तरह की समीकरणों से होता है जब की एक समीकरण के एक से अधिक हल हो, और जब भी यदि एक ही समीकरण को अलग अलग अक्षरों के उपयोग के साथ दे दिया जाए तब भी बच्चे सोचते हैं की हल भी अलग ही होगा। उदाहरण के लिए वैगनर(1981) ने पाया कि इन दो समीकरणों के बारे मे 7w+22=109 और 7n=22=109, बारह से सत्रह वर्ष की उम्र के बहुत से बच्चे तुरंत नहीं पहचान पाये थे कि दी गई दोनों समीकरणों के हल समान ही थे।

व्यापक संख्या के रूप में

व्यापक संख्या के रूप मे अक्षरों के द्वारा एक से अधिक मान को ग्रहण करने की संभावना को विशिष्ट की अवधारणा की दिशा मे एक कदम आगे के रूप मे देखा जा सकता है। जहां अक्षर चर के रूप मे इस्तेमाल होता है और उसके मानो को एक समूह या समुच्चय के रूप में लिख सकते हैं। K-Bchemann (1981 a- Page109) ने एक प्रश्न का उपयोग किया था कि आप C के बारे मे क्या कहेंगे यदि C+D = 10 है और C छोटा है D से। इसके जवाब मे अधिकांश ने सिर्फ एक मान बताया 4. जबकि अन्य ने व्यवस्थित रूप से एक सेट, 1, 2, 3, −4 बताया जो कि C के मान के रूप में था। यह बात चर को सामान्यीकृत संख्या के रूप में समझने के भाव को प्रदर्शित करती है। इससे भी और परिष्कृत प्रतिक्रिया जवाब के रूप में ये हो सकती है कि C< 5 - जो कि किसी चर की अवधारणा को और अधिक पुख्ता करती है कि वह मान 5 से छोटी कोई भी संख्या हो सकती है। यह बात इस बात से प्रेरित है कि चर के स्थान पर 5 से छोटी कोई भी संख्या हो सकती है। एक प्रतिक्रिया ये भी हो सकती है जोकि कम देखने को मिलती है कि C = 10 - D, जो कि एक और तरह से उसी समझ को दिखाता है कि C किसी भी संख्या को ग्रहण कर सकता है पर उसका मान D से छोटा होना चाहिये।

पठन सामग्री–5

गणित के अन्य क्षेत्रों मे बीजगणित की भूमिका

गणित के अन्य क्षेत्रों जैसे संख्या प्रणाली, ज्यामिती, त्रिकोणमिति, सांख्यिकी इत्यादि के विकास मे बीजगणित नेएक अहम भूमिका निभाया है? यह अवधारणाओं के सरलीकरण मे भी मदद करता है ताकि हम उन्हें आसानी से समझ सकें?

ऋणात्मक संख्याओं के उद्भव मे बीजगणित की भूमिका

समीकरण को हल करना बीजगणित का एक प्रमुख भाग है? मान लीजिए एक समीकरण है। X + 1 = 0, जहां X एक अज्ञात (चर) राशि है? जब 1 के साथ X को जोघ जाता है तो उसका योग शून्य होता है? लेकिन ऐसी कोई संख्या नहीं थी (क्योंकि उस वक्त सिर्फ धनात्मक संख्या प्रणाली थी) जिसे 1 के साथ जोडने पर योग शून्य (0) हो जाए? इस आवश्यकता ने एक नए प्रकार की संख्या प्रणाली को जन्म दिया जिसे ऋणात्मक संख्या कहते हैं?

काल्पनिक संख्या (imaginary number) के उद्भव मे बीजगणित की भूमिका

(The number system of algebra by Henry B- Fine] Boston USA] D- C- Heath and Co- Publishers, 1907)

मान लें एक समीकरण है $X^2 + 1 = 0$ जहां एक चर राशि है? जब हम इस समीकरण को हल करने की कोशिश करते हैं (वास्तविक संख्या के अंदर) तब हमे कोई हल नहीं मिलता? हमें ?–1 के मान की आवश्यकता पड़ती है (जो की उस वक्त तक अस्तित्व मे नहीं था) √–1 के लिए एक नया प्रतीक बनाया Xया जिसका नाम "आयोटा" है और जिसे अँग्रेजी की छोटी अक्षर "i" से लिखते हैं? इसके वर्ग का मान –1 है?तब सेएक नई संख्या प्रणाली का विकास हुआ जिसे काल्पनिक संख्या (imaginary number)कहा X या जो हमारेवर्तमानसंख्याप्रणालीका एक हिस्सा बन X या है?

- ज्यामितीय समस्याओं को हल करने मे बीजगणित की भूमिका

ज्यामिती मे हम और रेखाचित्र की बात करते हैं? हमे उनके आयाम को मापने की जरूरत पड़ती है? यहाँ बीजगणित एक साधन के रूप मे काम करता है?

उदाहरण 1

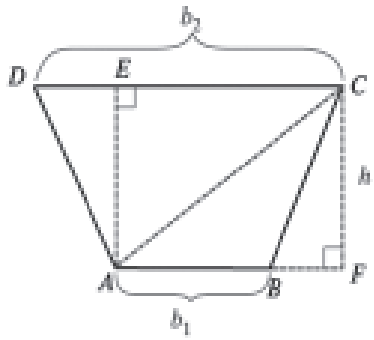
एक वृत मे परिधि और व्यास का अनुपात एक स्थिर राशि है जिसे π (पाई) के द्वारा चिन्हित करते हैं? इसका मान लगभग 22/7 या 3.14 होता है? इसलिए हम कह सकते हैं की C/d = , जहां C परिधि एवं क व्यास होता है?

या C = d

हम जानते हैं की वृत का व्यास (d) उसकी त्रिज्या (π) के दुगुना होता है यानि d = 2 r

इसलिए C = d = × 2 r या C = 2 r

उदाहरण 2: मान लीजिये ABCD एक समलंब (trapezium) है और हमे इसका क्षेत्रफल निकालना है? चलिये हम विकर्ण AC और ऊंचाई AE और CF बनाते हैं? चूंकि AFCE एक गा?



अगर AB = b_1, CD = b_2 और AE = CF = h है?

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = b_1 h

त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ b_2h

समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$$

$$= \frac{1}{2}[b_1 + b_2]h$$

इस तरह से बीजगणित हमें ज्यामिती के सूत्रों को समझने मे मदद करता है?

विज्ञान और अभियांत्रिकी जैसे अन्य विषयों मे :

बीजगणित व्यापक रूप से भौतिकी, रसायन, भूगोल जैसे विषयों मे प्रयोग किया जाता है? इसका उपयोग अभियांत्रिकी की विभिन्न शाखाओं जैसे इलैक्ट्रिकल, इलेक्ट्रनिक्स, सिविल, केमिकल, वैमानिकी और मैकनिकल मे भी होता है?

मान लीजिये एक वस्तु का द्रव्यमान m है। जो सीधी रेखा मे u की प्रारम्भिक गति से चल रही है? अगर t समय तक F मात्रा की लगातार बल लगाने पर इसकी गति v हो जाती है तब इसका प्रारम्भिक और अंतिम गति (momentum) क्रमशः उन और mv होगी?

अब, न्यूटन के गति के दूसरे नियम के अनुसार

लगाया हुआ बल गति मे परिवर्तन की दर

$$F \propto \frac{m(v-u)}{t}$$

और, $F = \frac{km(v-u}{t}$ यहाँ, $\frac{(v-u)}{t} = a$

अत:, F = k m a;

यहां k एक स्थिरांक है।

$a = \frac{(v-u)}{t}$ को त्वरण कहते हैं जो वेग मे परिवर्तन की दर है? भार (mass) और त्वरण का SI मात्रक किलोग्राम m/s^2 है? एक इकाई बल वह होता है जो अगर किसी m भार के बस्तु पर लगे तो उसमे $1m/s_2$ का त्वरण उत्पन्न करेगा मतलब 1 इकाई बल = k (1 kg) (1 m/s_2)। इस तरह से k का मान 1 होता है?

अत: F = m a

यह न्यूटन की गति का दूसरा नियम है? बल का मात्रक न्यूटन है जो kgm/s_2 होता है?यह नियम हमें किसी वस्तु में लगने वाले बल को मापने के लिए एक साधन देता है?

भौतिकी और यान्त्रिकी, नियमों और समीकरणों पर आधारित है? ये बीजगणित समीकरणों के प्रतिपादन और उसे समझने मे मदद करता है?

विभिन्न कौशलों जैसे तार्किक, आगमनात्मक और निगमनात्मक तर्क क्षमता के विकास में

(http://online-math-uh-edu/MiddleSchool/Modules/Module_4_Geometry_Spatial/Content/InductiveVersusDeductiveReasoning-pdf)

बीजगणित तार्किक क्षमता को बड़ाने मे मदद करता है? इन क्षमताओं की मदद से हम अपनी दैनिक समस्याओं को हल करते हैं?

चलिये हम 2 प्राकृतिक सम संख्याओं का गुणनफल प्राप्त करने की कोशिश करते हैं

2 X 4 = 8

8 X 12 = 96

24 X 38 = 912

1004 X 994 = 997976

ऊपर के उदाहरण मे हमने देखा की हर बार जब हम एक भाज्य प्राकृतिक संख्या को दूसरे भाज्य प्राकृतिक संख्या से गुणा करते हैं तो हमें गुणनफल के रूप मे एक भाज्य संख्या ही मिलती है? यहाँ हम आगमनात्मक तर्क

(inductive reasoning) का उपयोग करते हैं यह निर्धारित करने के लिए की "दो भाज्य प्राकृत संख्या का गुणनफल भाज्य संख्या होती है?"

हमारा निष्कर्ष एक अनुमान है लेकिन हम निगमनात्मक तर्क से इस कथन की सत्यता को साबित कर सकते हैं? इसे हम एक कथन और उसके सत्यापन तर्क और सबूत से कर सकते हैं?

आइये हम ऊपर लिखित कथन को निगमनात्मक तर्क से साबित करने की कोशिश करते हैं?

मान लीजिये और y दो सम प्राकृत संख्या है? हमें यह साबित करना है की इनका गुणनखण्ड xy भी एक सम संख्या है? चूंकि x और y सम संख्या है इसलिए ये 2 से भाज्य होंगे और $x = 2m$ के रूप मे लिखा जा सकता है, किसी m प्राकृत संख्या के लिए, और $y = 2n$, किसी n प्राकृत संख्या के लिए, $xy= 4mn$, 2 से भाज्य है इसलिए xy भी भाज्य होगी?अत: xy एक सम संख्या है?

हमारा निगमनात्मक तर्क कथन की सत्यता के लिए कोई कसर नहीं छोडता है? कुछ और मानों (उत्तरों) के लिए बड़ी गुणन तालिका बनाने की आवश्यकता नहीं है? यह कथन अपने आप मे सत्य है? हालांकि हमने कभी इस कथन को सत्य साबित करने के लिए निगमनात्मक तर्क का उपयोग नहीं किया? सामान्यत: आगमनात्मक तर्क कभी कभी हमें गलत उत्तर को ओर ले जाता है? हम जो अनुमान कर रहे हैं उसे सत्यापित करने के लिए निगमनात्मक तर्क एक अच्छा साधन है?

पठन सामग्री-6

अंकगणित से बीजगणित की ओर

भारत मे बीजगणित की शुरूआत कक्षा 6 से की जाती है। इस समय तक बच्चों अंकगणित व दोहरी संक्रियाए करना सिखाया जाता है। इन संक्रियाओ के गुणधर्म जैसे क्रमविनिमेय, साहचर्य पर भी कार्य हो चुका होता है। इस स्तर संख्याओं से परिचित होते है। परन्तु बीजगणित में (जिसको सामान्य रूप में अंकगणित का सामान्यीकरण माना जाता हैं।) हम चिन्हों का इस्तेमाल जैसे a, b, x, y, p, q आदि करते हैं जिनका कोई विशेष मान होता है। संख्याओं से वर्णो की ओर शिफ्ट बच्चे के लिए भ्रम पैदा करता है। लोगों की मान्यता है कि बीजगणित हर जगह है और वो यह भी मानते है कि जब हम बच्चों को रिक्त स्थान वाले सवाल देते है जैसे 4 + ?= 9 तो बीजगणित कर रहे होते हैं क्योंकि रिक्त स्थान मे जो संख्या भरनी है उसे हम अज्ञात मान सकते है। बीजगणित और अंकगणित को अलग अलग करना बहुत ही मुश्किल है। यह इस चीज को दर्शाता है कि बीजगणित और अंकगणित में संज्ञानात्मक है। यद्यपि यह सवाल उल्टी गिनती व घटानें के तरीके से भी हल किया जा सकता है। यह एक बीजगणितीय सोच को विकसित करने का तरीका सिखाता है।

अंकगणित से बीजगणित के शीफ्ट को आसानी से समझने के लिए बच्चों के साथ जोड मे संख्या पर काम करके आसान किया जा सकता है।

2 + 6 = ?

= 8

2 + 8 = ?

= 10

2 + 10 = ?

= 12

2 + ? = ?

उपरोक्त प्रतिरूप से हम निष्कर्ष निकाल सकते है कि जगह 12 आयेगा और यहां हम ? को अज्ञात मान सकते है यह बीजगणित सोच को बढ़ाता है।

- ज्यामिती से अंकगणित व अंकगणित से बीजगणित जाने को एक उदाहरण से समझा जा सकता है जैसे –

यदि एक आयत की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 6 सेमी व 4 सेमी है तो उसका क्षेत्रफल होगा

लम्बाई X चौड़ाई = 6 × 4 = 24 वर्ग सेमी

इसी प्रकार से यदि लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 2 मीटर और 3 मीटर हो तो उसका क्षेत्रफल होगा

लम्बाई × चौडाई = 2 × 3 = 6 वर्ग मीटर

यदि हम लम्बाई को L इकाई और चौडाई को B इकाई लेते है तो क्षेत्रफल A होगा क्षेत्रफल और इस प्रकार आयत के क्षेत्रफल का सामानयीकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है–

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौडाई

A = L × B वर्ग इकाई

यहॉ पर L और b का मान संदर्भ के आधार पर निर्भर करेगा यानी कि इसका मान संदर्भ के आधार पर बदल सकता है। अत: इनको चर कहा जाएगा। A का मान b के मान पर निर्भर करेगा। इसलिए L और b काक स्वतंत्र चर और A को आश्रित चर कहा जाता है।

- अंकगणित सोच से बीजगणित सोच को एक और अन्य उदाहरण से स्थापित किया जा सकता है।

यहॉ हम व्यंजक लेते है जैसे: 4 + 3 & 5 + 2. ये दोनो व्यंजक एक ही संख्या 7 को प्रदर्शित करते है। परन्तु दोनो व्यंजकों मे 7 बनाने का अलग अलग तरीका है। पहला व्यंजक इस संख्या को 3 से 4 बड़ा दर्शाता है जबकी दूसरा व्यंजक इसको 5 से 2 बड़ा दर्शाता है। इस व्यंजक को हम 3 मे 4 का जोड़ व 2 में 5 का जोड़ भी कह सकते है। अगर हम इसे समीकरण के रूप मे लिखे तो समीकरण 4 + 3 = 5 + 2 और यदि यह समीकरण 4 + 3 = ? + 2 के रूप में दिया जाय और हमें अज्ञात संख्या ज्ञात करनी हो तब भी हमें उच्च स्तरीय सोच की आवश्यकता होगी। यहां पर रिक्त स्थान अज्ञात के रूप में हैं जिसको ज्ञात करने की प्रक्रिया बीजगणित सोच को बढ़ावा देती हैं।

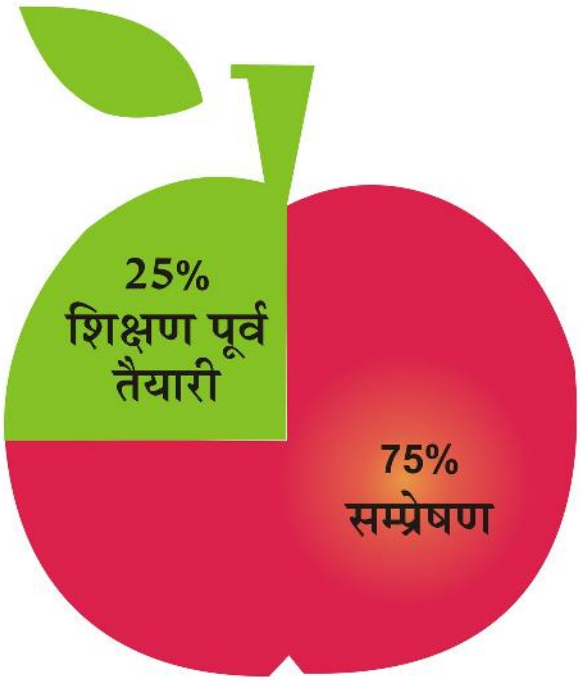
यहां पर यह संभावना है कि रिक्त स्थान को 7 से भर दें। यह भी दर्शाता है कि ध्यान सिर्फ समीकरण में बायें पक्ष की संक्रियात्मक प्रक्रिया की तरफ है। = में चिन्ह और समीकरण के दोनों पक्षो के संतुलन का ध्यान नहीं रखा गया है और ये उच्च स्तरीय सोच की मांग करता है।

सोच का स्तर निम्नलिखित उदाहरण से बाताया जा सकता है।

5 - 3 = ? + 2

यहॉ पर रिक्त स्थान का मान ज्ञात करने के लिए दो चीजों की आवश्यकता है वो हैं –

5 - 3 = 2 और 0 + 2 = 2



उत्तराखण्ड सभी के लिए शिक्षा परिषद
राज्य परियोजना कार्यालय, ननूरखेड़ा,रायपुर, देहरादून, उत्तराखण्ड